УДК 62-50

Г. А. АГРАНОВИЧ, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ МНОГОТАКТНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКТЕТНЫХ СИСТЕМ

Приведены исследования линейных математических моделей непрерывно-дискретных динамических систем в предположении, что дискретные подсистемы определены на нескольких временных последовательностях.

Многие динамические системы, содержащие непрерывные и дискретные подсистемы, описываются математической моделью в виде взаимосвязанных дифференциальных и конечно-разностных уравнений [1]. Если дискретные подсистемы функционируют на одной временной последовательности, то такую непрерывно-дискретную систему (НДС) назовем однотактной. Методам исследования однотактных НДС посвящены, в частности, работы [1], [2]. В ряде прикладных задач дискретные подсистемы функционируют на разных временных последовательностях. Это связано как с функциональными особенностями подсистем, так и желанием проектировщиков добиться их максимальной эффективности. Например, в бортовой ЭВМ летательного аппарата сигналы с датчиков угловых скоростей и углов обрабатываются значительно чаще, чем сигналы о положении центра масс. Общая модель [1] позволяет описать динамику однотактных систем, поскольку временная последовательность в ней произвольна. Однако для явного выделения подсистем и учета особенностей динамики системы, представляется целесообразным введение математической модели многотактных непрерывно-дискретных систем (МНДС).

Пусть последовательности моментов времени

$$\Theta_i = \left\{ t_1^i, t_2^i, t_3^i, \ldots \mid t_{k+1}^i - t_k^i \ge T_i > 0 \right\},\ i = 1..N \tag{1}$$

определяют функционирование дискретных подсистем. Если в (1) интервалы T_i между соседними моментами времени постоянны, то есть

$$t_k^i = kT_i,\ T_i = const, \tag{2}$$

то дискретные подсистемы являются однотактными с тактами дискретности T_i. Элементы объединенной последовательности дискретных моментов времени

$$\Theta = \bigcup_{i=1}^{N} \Theta_i = \{t_1, t_2, t_3, \dots\} \tag{3}$$

входят, может быть под другими номерами, в одну или несколько п о-следовательностей (1). Связь между их номерами весьма сложна, даже если последовательности удовлетворяют условиям (2). По видимому, наиболее простым здесь является случай, когда такты дискретных по д-систем (2) являются взаимно рациональными числами, что чаще всего и встречается на практике. Например, если дискретные подсистемы реализованы в виде программ одной управляющей ЭВМ, то их такты содержат целое число периодов тактового генератора компьютера и, следовательно, взаимно рациональны. В обсуждаемом частном случае последовательность (3) обладает свойством периодичности - у нее п е-риодически повторяются интервалы между соседними моментами времени, периодом при этом является наименьшее общее кратное та к-тов всех дискретных подсистем.

Для описания взаимодействия непрерывной и дискретных по д-систем МНДС введем следующие функции текущего времени t

$$\begin{gathered} k\,i(t) = Max\{k \mid t_k^i \in \Theta_i,\, t_k^i \le t\}, \\ [\,t\,]_i = t_{ki(t)}, \quad \{t\}_i = t - [\,t\,]_i\,. \end{gathered} \tag{4}$$

и блочный вектор состояния МНДС

$$X(t) = col\{Z_H(t),\, Z_{Д1}([\,t\,]_1),\, Z_{Д2}([\,t\,]_2), \dots, Z_{ДN}([\,t\,]_N)\}. \tag{5}$$

Тогда модель состояния МНДС может быть представлена следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} &\dot Z_H(t) = A_{HH}(t)\, Z_H(t) + \sum_{i=1}^{N} A_{HДi}(t)\, Z_{Дi}([\,t\,]_i) + B_{HH}(t) U_H(t), \\ &t \notin \Theta\,; \\ &Z_{Дi}([\,t\,]_i) = A_{HДi}([\,t\,]_i)\, Z_H([\,t\,]_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N} A_{ДД\,ij}([\,t\,]_i)\, Z_{Дj}([\,t-0\,]_j) + B_{ДДi}([\,t\,]_i)\, U_{ДДi}([\,t\,]_i), \\ &t \in \Theta_i\,,\ i = 1 \dots N\,; \\ &Z_H(t_0) = X_{H0}\,;\ Z_{Дi}(t_0) = X_{Дi0}\,,\ i = 1 \dots N. \end{aligned} \tag{6}$$

Способ записи разностных уравнений в (6) отличается от трад и-ционного. Однако для многотактных систем он более удобен. Для д емонстрации его преимуществ и проблем описания многотактных систем, рассмотрим следующий пример. Пусть на последовательностях с тактами T_1 и T_2 функционируют сумматоры с перекрестными связями. Традиционная математическая модель такой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} Z_1(k_1T_1) &= Z_1(k_1T_1 - T_1) + \underline{Z_2\left(k_2^1T_2\right)} + U_1(k_1T_1), \\ Z_2(k_2T_2) &= \underline{Z_1\left(k_1^2T_1\right)} + Z_2(k_2T_2 - T_2) + U_2(k_2T_2). \end{aligned}$$

Такая запись лишь на первый взгляд, и это хорошо известно разработчикам многотактных алгоритмов для управляющих ЭВМ, кажется простой и удобной. Действительно, коэффициенты k_i^j следует задать таким образом, чтобы перекрестные связи определялись последними значениями переменных смежной подсистемы. Для этого требуется производить соответствующие расчеты, которые в уравнениях отсутствуют. Расчеты эти должны отличаться в зависимости от того, срабатывает ли в данный момент времени только одна из дискретных подсистем или срабатывают обе подсистемы. Причем во втором случае, то есть при $k_1T_1 = k_2T_2$, в перекрестных связях следует учесть запаздывания на такт. Действительно, если запаздывания отсутствуют, то рассматриваемые в примере уравнения оказываются не разрешенными относительно новых значений переменных, то есть описывают совершенно другую систему. Если же не обратить на это внимание, то результат будет зависеть от порядка вычислений, что часто приводит к ошибкам при моделировании и реализации системы. В предлагаемых обозначениях модель принимает вид:

$$\begin{aligned} Z_1([t]_1) &= Z_1([t-0]_1) + Z_2([t-0]_2) + U_1([t]_1), \\ Z_2([t]_2) &= Z_1([t-0]_1) + Z_2([t-0]_2) + U_2([t]_2), \end{aligned}$$

так что все особенности перекрестных связей между дискретными подсистемами становятся регулярными и полностью определяются свойствами функции (4).

Уравнения (6) позволяют адекватно описать весьма широкий класс линейных МНДС. Однако они оказываются громоздкими для теоретических исследований и преобразований. Поэтому приведем далее (6) к общей модели [1] с вектором (5), введя специальным образом блочные матрицы коэффициентов.

Введем функции - индикаторы множеств Θ_i (1):

$$q_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Theta_i, \\ 0, & t \notin \Theta_i, \end{cases} \qquad \bar{q}_i(t) = 1 - q_i(t). \tag{7}$$

Заметим, что функции (7) являются периодическими с периодом T_i если последовательность Θ_i обладает свойством (2). С помощью функций (2) МНДС (6) можно представить в виде общей модели [1]:

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = A_H(t)\,X(t) + B_H(t)U_H(t), \quad t \notin \Theta; \\ &X(t_k) = A_Д(t_k)\,X(t_i - 0) + B_Д(t_k)\,U_Д(t_k), t_k \in \Theta,\ X(t_0) = X_0. \end{aligned} \tag{8}$$

с вектором состояния (5) на последовательности (3). Матрицы коэффициентов в (8) имеют вид

$$A_H(t) = \begin{bmatrix} A_{HH}(t) & A_{HД1}(t) & A_{HД2}(t) & \ldots & A_{HД\,N}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_Д(t) = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{A}_{ДH1}(t) & \bar{A}_{ДД11}(t) & \bar{A}_{ДД12}(t) & \ldots & \bar{A}_{ДД1N}(t) \\ \bar{A}_{ДH2}(t) & \bar{A}_{ДД21}(t) & \bar{A}_{ДД22}(t) & \ldots & \bar{A}_{ДД2N}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{A}_{ДH\,N}(t) & \bar{A}_{ДД\,N1}(t) & \bar{A}_{ДД\,N2}(t) & \ldots & \bar{A}_{ДД\,NN}(t) \end{bmatrix},$$

$$B_H(t) = \begin{bmatrix} B_{HH}(t) \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B_Д(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{ДД1}([t]_1) \\ B_{ДД2}([t]_2) \\ \ldots \\ B_{ДД\,N}([t]_N) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{ДHi}(t) = A_{ДHi}(t)q_i(t),\ \bar{B}_{ДДi}(t) = B_{ДДi}(t)q_i(t),\ \bar{A}_{ДДii}(t) = \\ &= A_{ДДii}(t)q_i(t) + E\,\bar{q}_i(t),\ \bar{A}_{ДДij}(t) = A_{ДДij}(t)q_i(t),\ i \neq j. \end{aligned}$$

Структура матриц (9) позволяет установить следующие важные свойства МНДС с постоянными тактами дискретных подсистем (3). Если такты являются взаимно-рациональными, а матрицы коэффициентов модели (6) не зависят от времени, то матрицы (9) являются периодическими с периодом T, равным наименьшему кратному периодов T_i дискретных подсистем. То есть МНДС с постоянными коэффициентами и взаимно-рациональными тактами дискретных подсистем является T - периодической НДС. Это свойство сохраняется, когда матрицы непрерывной и дискретной подсистем являются T - периодическими функциями. На основании модели (8), (9) можно показать, что переходная матрица периодической МНДС представляется в виде

$$\Phi(t,\tau)=L(t)\Phi_{НОД}^{k(t)-k(\tau)-1}(T)R(\tau), \quad \Phi_{НОД}(T)=\Phi(T,0) \tag{10}$$

подобном полученному в [1] для однотактных периодических НДС. В (10) $\Phi_{НОД}(T)=\Phi(T,0)$, причем ее структура по аналогии с [1] может быть представлена в виде произведения переходной матрицы непрерывной части (8) на интервалах непрерывности функционирования системы и матриц $A_Д(t_k)$ (9) дискретной ее части при $t_k \in [0,T]$. Левый и правый сомножители в (10) являются T - периодическими матрицами. Однако, в отличие от [1], они не являются взаимно-обратными. Более того, в общем случае они, как и матрица $\Phi_{НОД}(T)$, вырождены. При этом $L(T-0)=\Phi_{НОД}(T)$, $R(T-0)=E$.

Представление (10) позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости периодических МНДС. Они определяются собственными числами матрицы $\Phi_{НОД}(T)$ и по форме совпадают с аналогичными условиями для стационарных дискретных систем с постоянным тактом дискретности.

Если в приведенном выше примере $T_1=0{,}2$; $T_2=0{,}3$; то

$$\Phi_{НОД}(T)=A_Д(0{,}6)\,A_Д(0{,}4)\,A_Д(0{,}3)\,A_Д(0{,}2),$$

где

$$A_Д(0{,}6)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad A_Д(0{,}4)=A_Д(0{,}2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad A_Д(0{,}3)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Собственные числа $\Phi_{НОД}(T)$ равны 0 и 8. Второе по модулю больше единицы, так что система неустойчива.

Список использованной литературы

1. *Барабанов А. Т., Агранович Г. А.* Линейные модели и оптимизация непрерывно-дискретных динамических систем // Динамические системы. 1983. Вып. 2, с. 17-24. 2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К., 1987. - 288 с.

Поступила в 15 редколлегию.11.97