

О. В. АВРАМЕНКО, канд. физ.-мат. наук,  
Ин-т гидромех. НАН Украины

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ И СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется динамическая задача о распределении волны давления, инициируемой на некотором расстоянии от места стыка упругих оболочек с различными свойствами, заполненных жидкостью. Как частный случай динамической задачи, а также как первый шаг в исследовании данной проблемы рассмотрена статическая задача о двух соединенных упругих оболочках с различными свойствами без жидкости. Произведен сравнительный анализ полученных результатов, сделаны оценки решения динамической задачи по сравнению со статической.

Задачи физико-математического моделирования распространения волны давления в кусочно-однородной оболочке, заполненной жидкостью, привлекают интерес специалистов в связи с возможным применением результатов их решения в быстро прогрессирующей в последнее время такой области медицины, как имплантирование искусственных органов, в частности замена участков кровеносных сосудов искусственными или донорскими, а также при исследовании таких распространенных патологий кровеносных сосудов, как стеноз. Так, наиболее простые модели были предложены в [3] и [7]. Более сложная модель была разработана в [8] – [10], где учитываются изгибные деформации, имеющие большое значение в непосредственной близости к месту соединения оболочек с различными геометрическими и физическими свойствами. Целью настоящей работы является сравнительный анализ динамической и статической задач об упругой кусочно-неоднородной оболочке, заполненной жидкостью, а также оценка решения динамической задачи по сравнению с решением аналогичной статической задачи.

**Динамическая задача.** Рассмотрим динамическую задачу (ДЗ) о распространении волны давления, инициируемой на некотором расстоянии от места стыка упругих оболочек, заполненных жидкостью.

Математическая постановка ДЗ формулируется в трех областях с постоянными толщинами  $\Omega'_1 = \{(x, r) : -\infty < x \leq -x_1, r \leq r_1^1 + h_1\}$ ,  $\Omega_1 = \{(x, r) : -x_1 < x \leq 0, r \leq r_1^1 + h_1\}$  и  $\Omega_2 = \{(x, r) : 0 \leq x < \infty, r \leq r_2^2 + h_2\}$ . ДЗ формулируется для заданной при  $t = 0$  волны давления, приложенной в сечении  $x = -x_1$ . В области  $\Omega'_1$ , расположенной левее точки приложения импульса давления, волна распространяется влево. В то же время в области  $\Omega_1$ , расположенной правее точки приложения и м-

пульса, волна распространяется вправо. При достижении импульсом точки стыка  $x = 0$  возникает отраженная волна, которая в свою очередь распространяется влево в область  $\Omega_1$ , и проходящая волна, распространяющаяся вправо в  $\Omega_2$ . Величины левых областей  $\Omega'_1, \Omega_1$  и правой области  $\Omega_2$  помечены штрихом и индексами 1 и 2, соответственно.

Математическая постановка ДЗ [2], [5] записывается в виде

$$\xi_1^2 \frac{\partial^4 w'_1}{\partial x^4} + w'_1 + \frac{\partial^2 w'_1}{\partial t^2} = p_i^h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w'_1}{\partial t^2} = \frac{(1 - 0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{\partial^2 \hat{p}'_1}{\partial x^2} \quad \text{в } \Omega'_1, \quad (2)$$

$$p_i^h = \hat{p}'_1 - \frac{1}{8} (1 - 0.5\xi)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}'_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u'_1}{\partial t} = -\frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}'_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\xi_1^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = p_i^h, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{(1 - 0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial x^2} \quad \text{в } \Omega_1, \quad (5)$$

$$p_i^h = \hat{p}_1 - \frac{1}{8} (1 - 0.5\xi)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\xi_1^2 \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \left( \frac{a_1^0}{a_2^0} \right)^2 w_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{h_1}{h_2} \frac{E_1}{E_2} p_i^2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{\partial^2 \hat{p}_2}{\partial x^2} \quad \text{в } \Omega_2, \quad (8)$$

$$p_i^2 = \hat{p}_2 - \frac{1}{8} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x}. \quad (9)$$

Условия сопряжения:

на поверхности  $x = -x_1$

$$\begin{aligned} \hat{p}'_1 - f(t) &= \hat{p}_1, \quad u'_1 = u_1, \quad w'_1 = w_1, \\ \frac{\partial w'_1}{\partial x} &= \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w'_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w'_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}; \end{aligned} \quad (10)$$

на поверхности  $x = 0$

$$\hat{p}_2 = \hat{p}_1, \quad u_2 = u_1, \quad w_2 + \frac{a_2^0}{a_1^0} = w_1 + 1,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}, \quad (11)$$

каждая искомая функция  $s(x, t)$  должна удовлетворять условиям

$$|s(x, t)| \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Начальные условия имеют вид

$$s(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial s(x, t)/\partial t|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Обозначения введены следующим образом (индексы 1, 2 и штрих не приводятся):  $x$  – осевая координата;  $r$  – радиальная координата;  $t$  – время;  $w$  – радиальное смещение оболочки;  $\hat{p}$  – среднее значение давления в сечении;  $p_i|_{r=r_i} = q$  – радиальное давление на стенку;  $u$  – осредненная по сечению скорость;  $r_i$  – внутренний радиус оболочки;  $a$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\rho_f$  – плотность жидкости;  $\rho$  – плотность стенок оболочки;  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  – изгибная жесткость;  $m_x = m = D \partial^2 w / \partial x^2$  – изгибающий момент;  $q_x = q = D \partial^3 w / \partial x^3$  – перерезывающая сила;  $f(t)$  – импульс давления;  $\xi = h/a$  – относительная толщина.

Безразмерные величины введены в виде (звездочки опускаются)

$$\begin{aligned} (x^*, r^*, w^*) &= (x, r, w)/a_1^0, \quad t^* = t \frac{1}{a_1^0} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad (u_1^*, u_2^*) = (u_1, u_2) \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \\ (p_i^{1*}, p_i^{2*}, \hat{p}_1^*, \hat{p}_2^*, f^*) &= (p_i^1, p_i^2, \hat{p}_1, \hat{p}_2, f)/\xi E_1. \end{aligned} \quad (14)$$

и безразмерные отношения:

$$\xi = \frac{h_1}{a_1}, \quad \xi_1^2 = \frac{\xi_1^2}{12(1-\nu^2)}, \quad \frac{a_2^0}{a_1^0}, \quad \frac{h_2}{h_1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \frac{E_2}{E_1}.$$

Решение ДЗ производится с помощью интегрального преобразования Лапласа с последующим численным обращением с применением разложений по синусам нечетных дуг [1]. Преобразование Лапласа для произвольной функции  $s(x, t)$  имеет вид

$$S(x, \tau) = \int_0^\infty s(x, t) e^{-\tau t} dt, \quad s(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} S(x, \tau) e^{\tau t} d\tau. \quad (15)$$

В соответствии с (15) уравнения (1) – (9), принимая во внимание начальные условия (13), переходят в

$$\xi_1^2 \frac{d^4 w_1'}{dx^4} + (1 + \tau^2) w_1' = p_i'^h, \quad (16)$$

$$\tau^2 W_1' = \frac{(1 - 0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{d^2 \hat{P}_1'}{dx^2} \quad \text{в } \Omega_1', \quad (17)$$

$$P_i'^h = \hat{P}_1' - \frac{1}{8} (1 - 0.5\xi)^2 \frac{d^2 \hat{P}_1'}{dx^2}, \quad U_1' = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d\hat{P}_1'}{dx}, \quad (18)$$

$$\xi_1^2 \frac{d^4 W_1}{dx^4} + (1 + \tau^2) W_1 + \frac{d^2 W_1}{dt^2} = P_i^h, \quad (19)$$

$$\tau^2 W_1 = \frac{(1 - 0.5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{d^2 \hat{P}_1}{dx^2} \quad \text{в } \Omega_1, \quad (20)$$

$$P_i^h = \hat{P}_1 - \frac{1}{8} (1 - 0.5\xi)^2 \frac{d^2 \hat{P}_1}{dx^2}, \quad U_1 = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d\hat{P}_1}{dx}, \quad (21)$$

$$\xi_1^2 \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^4 W_2}{dx^4} + \left( \frac{E_2}{E_1} \frac{h_2}{h_1} \frac{a_1^0}{a_2^0} \right)^2 W_2 + \frac{\rho_2}{\rho_f} \frac{\rho_f}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1} \frac{d^2 W_2}{dt^2} = P_i^d, \quad (22)$$

$$\tau^2 W_d = \frac{1}{2} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{d^2 \hat{P}_2}{dx^2} \quad \text{в } \Omega_2, \quad (23)$$

$$P_i^d = \hat{P}_2 - \frac{1}{8} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right)^2 \frac{d^2 \hat{P}_2}{dx^2}, \quad U_2 = -\frac{1}{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_f} \frac{d\hat{P}_2}{dx}. \quad (24)$$

Условия сопряжения (10), (11) сводятся к:  
на поверхности  $x = -x_1$

$$\begin{aligned} \hat{P}_1' - F(t) &= \hat{P}_1, \quad U_1' = U_1, \quad W_1' = W_1, \quad \frac{dW_1'}{dx} = \frac{dW_1}{dx}, \\ \frac{d^2 W_1'}{dx^2} &= \frac{d^2 W_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3 W_1'}{dx^3} = \frac{d^3 W_1}{dx^3}; \end{aligned} \quad (25)$$

на поверхности  $x = 0$

$$\begin{aligned} \hat{P}_2 &= \hat{P}_1, \quad U_2 = U_1, \quad W_2 + \frac{a_2^0}{a_1^0} = W_1 + 1, \quad \frac{dW_2}{dx} = \frac{dW_1}{dx}, \\ \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^2 W_2}{dx^2} &= \frac{d^2 W_1}{dx^2}, \quad \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^3 W_2}{dx^3} = \frac{d^3 W_1}{dx^3} \end{aligned} \quad (26)$$

После преобразований (16) – (24) приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям шестого порядка относительно  $\hat{P}_1'$ ,  $\hat{P}_1$  и  $\hat{P}_2$

$$\frac{d^6 \hat{P}_1'}{dx^6} + a_1 \frac{d^2 \hat{P}_1'}{dx^2} + a_2 \hat{P}_1' = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^6 \hat{P}_1}{dx^6} + a_1 \frac{d^2 \hat{P}_1}{dx^2} + a_2 \hat{P}_1 = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d^6 \hat{P}_2}{dx^6} + b_1 \frac{d^2 \hat{P}_2}{dx^2} + b_2 \hat{P}_2 = 0, \quad (29)$$

где

$$a_1 = \frac{(1 + \tau^2) \xi_1 \frac{\rho_1}{\rho_f} + \frac{1}{4} (1 - 0.5 \xi_1)}{\xi_1^2 \xi_1 \frac{\rho_1}{\rho_f}}, \quad a_2 = \frac{2\tau^2}{(1 - 0.5 \xi_1) \xi_1^2 \xi_1 \frac{\rho_1}{\rho_f}},$$

$$b_1 = \frac{\left( \frac{E_2}{E_1} \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{a_1^0}{a_2^0} \right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_f} \frac{\rho_f}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1} \tau^2 \right) \xi \frac{\rho_1}{\rho_f} + \frac{\tau^2}{4} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi_1 \right)}{\xi_1^2 \xi_1 \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\rho_1}{\rho_f}},$$

$$b_2 = \frac{2\tau^2}{\left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0.5 \frac{h_2}{h_1} \xi_1 \right) \xi_1^2 \xi_1 \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\rho_1}{\rho_f}}.$$

Соответствующие характеристические уравнения являются бикубическими, а их корни могут быть найдены по формулам Кардано. Имеется пара действительных равных по модулю корней с разными знаками и две пары комплексно сопряженных корней. Обозначим их  $\pm l_1, \pm l_2, \pm l_3$  для (27), (28) и  $\pm g_1, \pm g_2, \pm g_3$  для (29), где  $l_1, g_1 > 0$  и  $l_i$  и  $g_i$  ( $i = 2, 3$ ) имеют положительные действительные части. В соответствии с проведенным анализом решения уравнений (27) – (29) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{P}_1' &= C_{10}(\tau) e^{l_1 x} + C_{11}(\tau) e^{l_2 x} + C_{12}(\tau) e^{l_3 x}, \\ \hat{P}_1 &= C_4(\tau) e^{l_1 x} + C_5(\tau) e^{l_2 x} + C_6(\tau) e^{l_3 x} + \\ &+ C_7(\tau) e^{-l_1 x} + C_8(\tau) e^{-l_2 x} + C_9(\tau) e^{-l_3 x}, \\ \hat{P}_2 &= C_1(\tau) e^{-g_1 x} + C_2(\tau) e^{-g_2 x} + C_3(\tau) e^{-g_3 x}. \end{aligned} \quad (30)$$

Учитывая соотношения (17), (20), (23) после несложных преобразований можно получить выражения для радиальных смещений, изгибающих моментов и перерезывающих сил в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа

$$w_1' = \frac{(1 - 0.5 \xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times$$

$$\times (C_{10}(\tau) l_1^2 \exp(l_1 x) + C_{11}(\tau) l_2^2 \exp(l_2 x) + C_{12}(\tau) l_3^2 \exp(l_3 x)),$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{(1-0,5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_4(\tau) \mathcal{V}_1^2 \exp(l_1 x) + C_5(\tau) \mathcal{V}_2^2 \exp(l_2 x) + C_6(\tau) \mathcal{V}_3^2 \exp(l_3 x) + \right. \\
&\left. + C_7(\tau) \mathcal{V}_1^2 \exp(-l_1 x) + C_8(\tau) \mathcal{V}_2^2 \exp(-l_2 x) + C_9(\tau) \mathcal{V}_3^2 \exp(-l_3 x) \right), \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0,5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_1(\tau) g_1^2 \exp(-g_1 x) + C_2(\tau) g_2^2 \exp(-g_2 x) + C_3(\tau) g_3^2 \exp(-g_3 x) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1' &= \frac{1}{12(1-v^2)} \frac{(1-0,5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_{10}(\tau) \mathcal{V}_1^4 \exp(l_1 x) + C_{11}(\tau) \mathcal{V}_2^4 \exp(l_2 x) + C_{12}(\tau) \mathcal{V}_3^4 \exp(l_3 x) \right), \\
M_1 &= \frac{1}{12(1-v^2)} \frac{(1-0,5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_4(\tau) \mathcal{V}_1^4 \exp(l_1 x) + C_5(\tau) \mathcal{V}_2^4 \exp(l_2 x) + C_6(\tau) \mathcal{V}_3^4 \exp(l_3 x) + \right. \\
&\left. + C_7(\tau) \mathcal{V}_1^4 \exp(-l_1 x) + C_8(\tau) \mathcal{V}_2^4 \exp(-l_2 x) + C_9(\tau) \mathcal{V}_3^4 \exp(-l_3 x) \right), \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{1}{12(1-v^2)} \frac{1}{2} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0,5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_1(\tau) g_1^4 \exp(-g_1 x) + C_2(\tau) g_2^4 \exp(-g_2 x) + C_3(\tau) g_3^4 \exp(-g_3 x) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1' &= \frac{1}{12(1-v^2)} \frac{(1-0,5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_{10}(\tau) \mathcal{V}_1^5 \exp(l_1 x) + C_{11}(\tau) \mathcal{V}_2^5 \exp(l_2 x) + C_{12}(\tau) \mathcal{V}_3^5 \exp(l_3 x) \right), \\
Q_1 &= \frac{1}{12(1-v^2)} \frac{(1-0,5\xi)}{2} \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_4(\tau) \mathcal{V}_1^5 \exp(l_1 x) + C_5(\tau) \mathcal{V}_2^5 \exp(l_2 x) + C_6(\tau) \mathcal{V}_3^5 \exp(l_3 x) - \right. \\
&\left. - C_7(\tau) \mathcal{V}_1^5 \exp(-l_1 x) - C_8(\tau) \mathcal{V}_2^5 \exp(-l_2 x) - C_9(\tau) \mathcal{V}_3^5 \exp(-l_3 x) \right), \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= -\frac{1}{12(1-v^2)} \frac{1}{2} \left( \frac{a_2^0}{a_1^0} - 0,5 \frac{h_2}{h_1} \xi \right) \frac{\rho_1}{\rho_f} \xi \frac{1}{\tau^2} \times \\
&\times \left( C_1(\tau) g_1^5 \exp(-g_1 x) + C_2(\tau) g_2^5 \exp(-g_2 x) + C_3(\tau) g_3^5 \exp(-g_3 x) \right).
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (30) и (31) в условия (25), (26) и принимая во внимание (18), (21), (24), приходим к системе 12 алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $C_i(\tau)$  ( $i = \overline{1,12}$ ). После решения данной системы были получены искомые решения  $\hat{P}_1(x, \tau)$ ,  $\hat{P}_2(x, \tau)$ ,  $W_1(x, \tau)$ ,  $W_2(x, \tau)$ ,  $M_1(x, \tau)$ ,  $M_2(x, \tau)$ ,  $Q_1(x, \tau)$ ,  $Q_2(x, \tau)$  в пространстве образов интегрального преобразования Лапласа. Обращение в пространство оригиналов производилось численно [1]. Импульс давления задавался в виде:

$$f(t) = 0.5A t^2 e^{-\alpha t}, \text{ где } A = 4.5 \cdot 10^{-6}, \alpha = 3 \cdot 10^{-3}. \quad (34)$$

Безразмерная функция  $f(t)$  подобрана так, что моделирует реальный сердечный пульс [4], [6], в котором систола давления равна  $5 \cdot 10^3 \text{ н/м}^2$ , продолжительность импульса  $[0, t_1]$  соответствует  $t_1 = 1 \text{ сек}$ , а максимум импульса находится в  $t = \frac{1}{3} t_1$ .

**Статическая задача.** Как частный случай ДЗ, постановка и метод решения которой представлены выше, а также как первый шаг в исследовании данной проблемы следует рассматривать статическую задачу (СЗ) о двух соединенных упругих оболочках с различными свойствами без жидкости. Рассмотрим две области упругой оболочки

$$\hat{\Omega}_1 = \{(x, r) : x \leq 0, a_1^0 - h_1/2 \leq r \leq a_1^0 + h_1/2\}$$

и

$$\hat{\Omega}_2 = \{(x, r) : x > 0, a_2^0 - h_2/2 \leq r \leq a_2^0 + h_2/2\},$$

где необходимо найти радиальные смещения  $w_2(x)$  и  $w_1(x)$  как решения следующей краевой задачи [2]:

$$\xi_1^2 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + w_1 = 0 \quad \text{в } \hat{\Omega}_1, \quad (35)$$

$$\xi_1^2 \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \frac{d^4 w_2}{dx^4} + \left( \frac{a_1^0}{a_2^0} \right)^2 w_2 = 0 \quad \text{в } \hat{\Omega}_2, \quad (36)$$

условия сопряжения при  $x = 0$

$$w_1(x) + 1 = w_2(x) + a_2^0/a_1^0, \quad \frac{dw_1(x)}{dx} = \frac{dw_2(x)}{dx}, \quad (37)$$

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} = \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^3 w_2(x)}{dx^3},$$

условия на бесконечности

$$w_1(x) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

$$w_2(x) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (38)$$

Решение СЗ несложно получить из обыкновенных дифференциальных уравнений (35) и (36). При этом получаются следующие выражения для радиальных смещений срединной поверхности от ее невозмущенного положения, в котором  $w = 0$  в области  $\hat{\Omega}_2$  и  $w = a_2^0/a_1^0 - 1$  в области  $\hat{\Omega}_1$ .

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 \exp(s_1 x) + C_2 \exp(s_2 x), \\ w_2 &= C_3 \exp(s_3 x) + C_4 \exp(s_4 x), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$s_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\xi}}(1 \pm i), \quad s_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a_2^0}{a_1^0} \frac{h_2}{h_1} \frac{1}{\xi}}(1 \mp i),$$

$C_n (n = \overline{1,4})$  – произвольные постоянные.

В соответствии с (14) безразмерные изгибающие моменты и перерезывающие силы записываются в форме

$$m_x^1 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \quad m_x^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^2 w_2}{dx^2}, \quad (40)$$

$$q_x^1 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{d^3 w_1}{dx^3}, \quad q_x^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{d^3 w_2}{dx^3}, \quad (41)$$

Учитывая (39) – (41), решения для изгибающих моментов и перерезывающих сил можно представить в виде

$$m_x^1 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} (C_1 s_1^2 \exp(s_1 x) + C_2 s_2^2 \exp(s_2 x)),$$

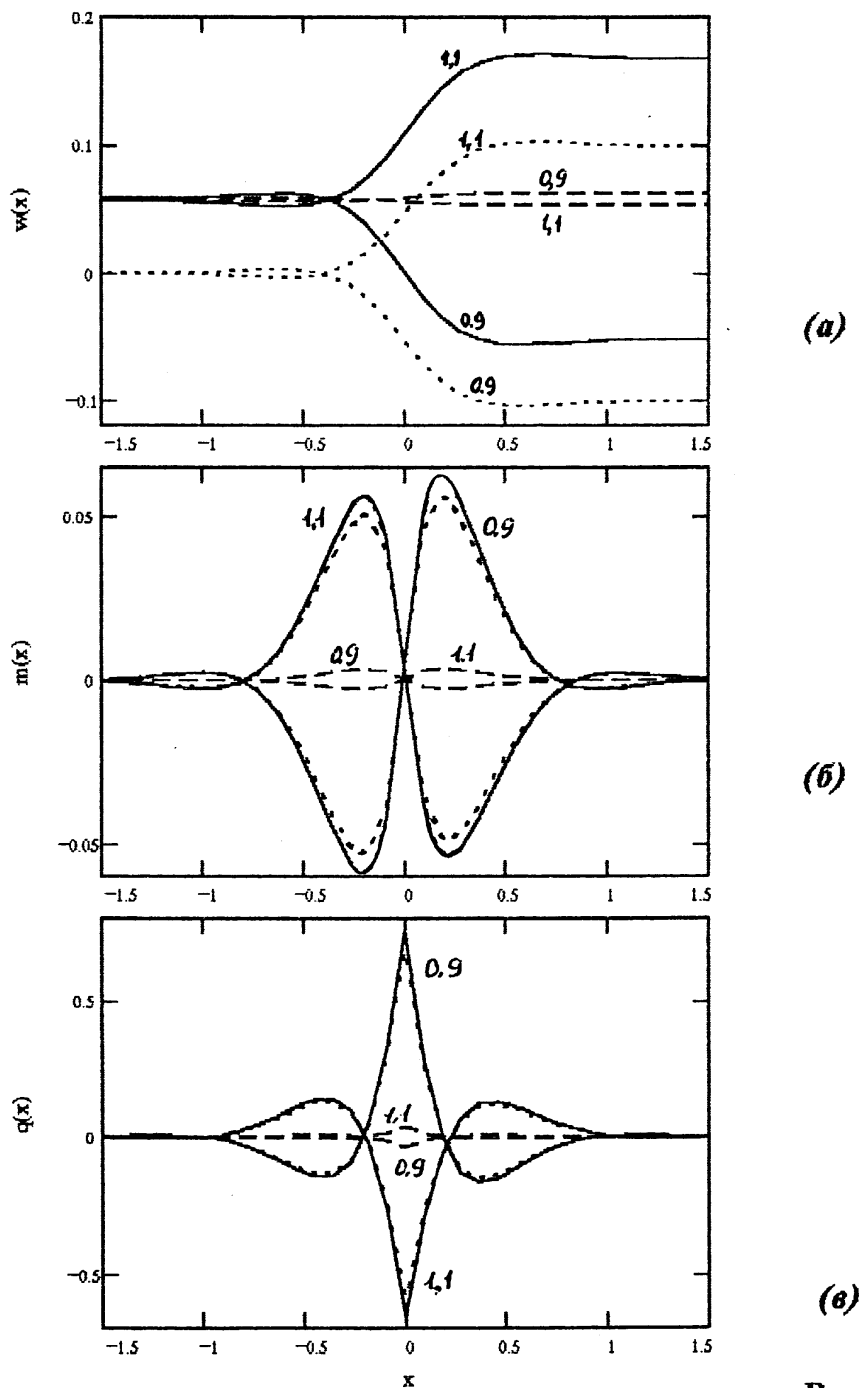
$$m_x^2 = \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{1}{12(1-\nu^2)} (C_3 s_3^2 \exp(s_3 x) + C_4 s_4^2 \exp(s_4 x)), \quad (42)$$

$$q_x^1 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} (C_1 s_1^3 \exp(s_1 x) + C_2 s_2^3 \exp(s_2 x)),$$

$$q_x^2 = \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{1}{12(1-\nu^2)} (C_3 s_3^3 \exp(s_3 x) + C_4 s_4^3 \exp(s_4 x)). \quad (43)$$



Подставляя (39) в граничные условия (37) и (38), получаем неоднородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_n, (n = \overline{1,4})$ . Решение данной системы и подстановка полученных постоянных в (39), (42), (43) не представляет особого интереса, потому здесь не приводится.



**Рис.1**

**Сравнительный анализ решений ДЗ и СЗ.** На рис. 1 а,б,в представлены распределения радиального смещения

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{в } \Omega_1(\hat{\Omega}_1) \\ w_2(x) + \frac{a_2}{a_1} - 1 & \text{в } \Omega_2(\hat{\Omega}_2) \end{cases}$$

изгибающего момента

$$m(x) = \begin{cases} m_1(x) & \text{в } \Omega_1(\hat{\Omega}_1) \\ m_2(x) & \text{в } \Omega_2(\hat{\Omega}_2) \end{cases}$$

и перерезывающих сил

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x) & \text{в } \Omega_1(\hat{\Omega}_1) \\ q_2(x) & \text{в } \Omega_2(\hat{\Omega}_2) \end{cases}$$

Решение поставленных задач производилось для следующих значений безразмерных параметров  $\xi = h_1/a_1 = 0,1$ ;  $\rho_1/\rho_f = \rho_2/\rho_f = 1,1$ ;

$E_2/E_1 = 1,0$ ; параметры  $h_2/h_1$  и  $a_2^0/a_1^0$  варьировались:

для СЗ  $h_2/h_1 = 1$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 1,1$  (точечная линия, индекс 1,1),

$h_2/h_1 = 1$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 0,9$  (точечная линия, индекс 0,9),

для ДЗ  $h_2/h_1 = 1$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 1,1$  (сплошная линия, индекс 1,1),

$h_2/h_1 = 1$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 0,9$  (сплошная линия, индекс 0,9),

$h_2/h_1 = 1,1$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 1$  (пунктирная линия, индекс 1,1),

$h_2/h_1 = 0,9$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 1$  (пунктирная линия, индекс 0,9).

Для ДЗ искомые значения  $w(x)$ ,  $m(x)$  и  $q(x)$  представлены в момент времени  $t = 2500$ , что соответствует наибольшему значению давления на стыке. Заметим, что для СЗ при значениях безразмерных параметров  $h_2/h_1 = 1$ ,  $a_2^0/a_1^0 = 1$ , т.е. в однородной оболочке, очевидно  $w(x) \equiv 0$ ,  $m(x) \equiv 0$  и  $q(x) \equiv 0$ . Сравнительный анализ ДЗ и СЗ приводит к следующим выводам:

- увеличение (уменьшение) радиуса срединной поверхности  $a_2^0/a_1^0 = 1,1$  ( $a_2^0/a_1^0 = 0,9$ ) при одинаковых толщинах  $h_2/h_1 = 1$  приводит к возрастанию (убыванию) абсолютных значений изгибающего момента  $|m(x)|$  и перерезывающей силы  $|q(x)|$  для ДЗ по сравнению с СЗ;
- увеличение (уменьшение) толщины оболочки  $h_2/h_1 = 1,1$  ( $h_2/h_1 = 0,9$ ) при одинаковых внутренних радиусах  $a_2^0/a_1^0 = 1$  приводит к убыванию (возрастанию) указанных абсолютных значений для ДЗ по сравнению с СЗ;

- влияние импульса давления на основные характеристики гидроупругой системы  $w(x)$ ,  $m(x)$  и  $q(x)$  невелико по сравнению со влиянием геометрической неоднородности по радиусу срединной поверхности при заданных безразмерных параметрах системы, соответствующих реальному пульсовому давлению в кровеносных сосудах типа аорты.

#### Список использованной литературы

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. 1965. 288с.
2. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. Киев., 1989. 204 с.
3. Селезов И. Т., Каплун Ю. М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика. 1991. № 24. С. 50-54.
4. Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C., Seed W. A. The mechanics of the circulation. Oxford University Press, 1978.
5. Moodie E. B., Barden D. W., Tait R. T. A boundary value problem for fluid-filled viscoelastic tubes // Mathematical Model. 1983, 4. P. 195–207.
6. Pedley T. J. The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
7. Selezov I. T. Some problems of the wave propagation in blood vessels // Int. Colloquium EUROMECH 311 "Blood-Wall Interaction". Berlin, Germany. 1993, October 17-21.
8. Selezov I. T., Pallotti G., Avramenko O. V. Predominant danger of bending stresses in a joint of a artificial and host blood vessels // International Journal of Artificial Organs. 1995, № 8. P. 439.
9. Selezov I. T., Pallotti G., Avramenko O. V., Bonomini V. Mathematical modeling of heart pulse propagation in the presence of joint of different vessels // Int. Colloquium EUROMECH 344 "Fluid-Structure Interactions in Biomechanics". London, UK. 1996, April 10-13.
10. Selezov I. T., Pallotti G., Avramenko O. V., Fratamico G., Coli L. Wave propagation in vessel with a joint due to transient and pulsatile excitation // Proc. 9<sup>th</sup> Int. Conf., Mechanics in Medicine and Biology, Ljubljana, Slovenia, 1996. P. 361-364.

Поступила в редколлегию 24.07.97