УДК 62-50.

А. Т. БАРАБАНОВ, д-р техн. наук, В. А. КРАМАРЬ, ассист.,
Севастоп. гос. техн. ун-т.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматриваются задачи оценки запасов устойчивости системы о единичной отрицательной обратной связью по распределению вещественных корней многочленов, характеризующих частотные годографы прямой цепи.

1. Пусть рассматривается система (рис. 1) с единичной отрицательной обратной связью и передаточной функцией

$$W(s) = p(s)/q(s), \quad W(\infty) = 0, \tag{1}$$

$p(s)$, $q(s)$ - заданные взаимно простые многочлены. Если разомкнутая система устойчива (многочлен $q(s)$ - гурвицев) и частотный годограф $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$, $j^2 = -1$ не охватывает точку $(-1{,}0j)$, то замкнутая система устойчива(многочлен $q(s)+p(s)$ - гурвицев, критерий Найквиста). Когда годограф проходит через точку $(-1{,}0j)$, замкнутая система оказывается на границе устойчивости (многочлен замкнутой системы имеет чисто мнимые корни). В теории и практике принято оценивать "надежность" факта устойчивости (а вообще говоря и качество переходных процессов) запасами устойчивости по амплитуде и фазе - величинами, указанными на рис. 2. При компьютеризации исследований сложных систем определение запасов устойчивости прямым образом (конечно - точечным построением годографа) наталкивается на известные трудности. Возника-

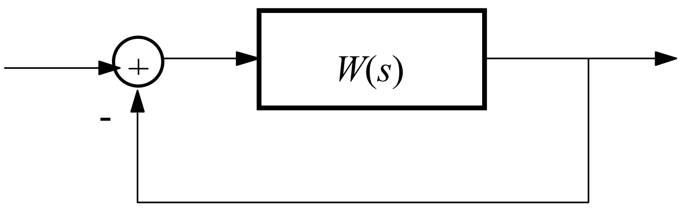

Рис.1 Система с единичной отрицательной обратной связью

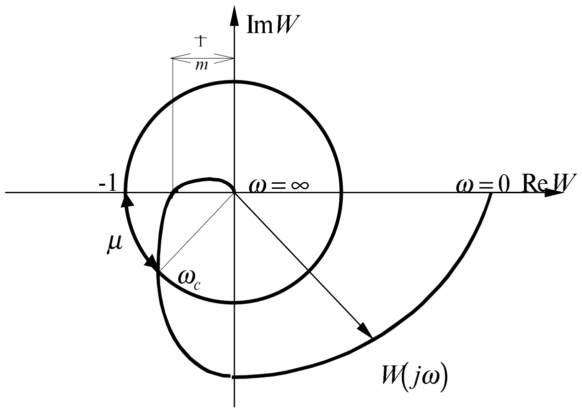

Рис. 2 Запасы устойчивости системы с годографом простой формы $(r = 0)$

ет задача определения или оценки запасов устойчивости без построения частотного годогр афа.

В [1] указаны необходимые и достаточные условия, при выполн е-нии которых, запасы устойчивости по амплитуде и фазе системы с п е-редаточной функцией прямой цепи вида (1), $q(s)=s^r g(s)$, где $p(0)/g(0)=k>0$, $g(s)$- устойчивый многочлен и $r\in\{0,1\}$, не меньше заданных. При этом рассматривается частотный годограф простой фо р-мы (рис. 2). Условие для запаса по амплитуде не м енее m_* имеет вид

$$\rho^-\left(B/A^-\right)=0 \tag{2}$$

- число всех различных отрицательных корней многочлена с вещес т-венными коэффициентами $B(x)$, доставляющих отрицательные знач е-ния многочлену $A(x)$, равно нулю. Многочлены $A(x)$ и $B(x)$ характеризуют годограф $W(j\omega)$, $\omega\geq 0$ и определяются соотношениями

$$\operatorname{Re}W(j\omega)+\beta=(1/2)\left[W(j\omega)+W(-j\omega)\right]+\beta=A(x)/\left|q(j\omega)\right|^2, \tag{3}$$

$$\operatorname{Im}W(j\omega)=(1/2j)\left[W(j\omega)-W(-j\omega)\right]=-B(x)/\omega\left|q(j\omega)\right|^2, \tag{4}$$

где

$$x=-\omega^2\leq 0,\quad \beta=1/m_* .$$

При

$$Q(s)=p(s)+\beta q(s)$$

$$A\left(s^2\right)=(1/2)\left[q(s)Q(-s)+q(-s)Q(s)\right]=\text{чет }\left[q(-s)Q(s)\right], \tag{5}$$

$$B\left(s^2\right)=(1/2)\left[sp(s)q(-s)+(-s)p(-s)q(s)\right]=\text{чет }\left[-sp(-s)q(s)\right], \tag{6}$$

где символ "чет" означает часть многочлена с четными степ енями.

Условие для запаса по фазе не менее μ_* имеет вид

$$\rho^-\left(E/A^-\right)=0, \tag{7}$$

где многочлен $E(x)$ определяет точки пересечения годографом едини ч-ной окружности и вводится соотношением

$$E\left(s^2\right)=q(s)q(-s)+p(s)p(-s), \tag{8}$$

а в многочлене $A(x)$, определяемом соотношением (5), $\beta=\cos\mu_*$.

2. Пусть передаточная функция прямой цепи системы с единичной отрицательной обратной связью имеет вид (1), причем $q(s)$ произвольно заданный многочлен, т.е. разомкнутая система может быть как у с-тойчивой так и неустойчивой. Пусть замкнутая система устойчива. Б у-дем рассматривать годограф $W(j\omega)$ произвольной формы (рис. 3). Пусть при достаточно больших $\omega\operatorname{Re}W(j\omega)<0$. Ближайшие $(-1,0j)$ точки пересечения годографа с вещественной отрицательной полуосью

и единичной окружностью определяют запасы устойчивости системы по амплитуде m_1, m_2, - будем говорить справа, слева соответственно, - и по фазе (центральные углы) μ_1, μ_2, - будем говорить снизу, сверху соответственно.

Для того, чтобы система имела запас устойчивости по амплитуде справа не менее заданного $m_{1*} > 1$, необходимо и достаточно, чтобы годограф $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ не пересекал вещественную ось в интервале $\left(-1, -1/m_{1*}\right)$. Найдем число всех вещественных отрицательных корней многочлена $B(x)$, который характеризует мнимую часть $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ и определяется по формуле (6), при которых годограф пересекает интервал $\left(-1/m_{1*}, 0\right)$ вещественной оси.

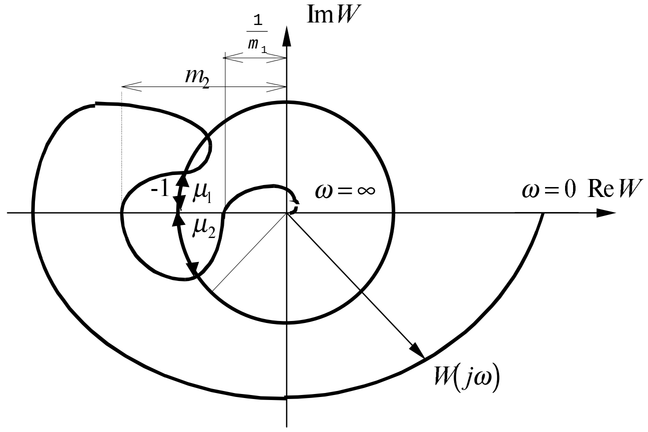

Рис. 3 Запасы устойчивости системы с годографом произвольной формы $(r = 0)$

Положим $\beta = 1/m_{1*}$. Тогда, согласно (3)

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + \beta = A_1(x)/\left|q(j\omega)\right|^2, \tag{9}$$

где многочлен $A_1(x)$ определяется в соответствии с формулой (3), $A_1\left(s^2\right) = (1/2)\left[q(s)Q(-s) + q(-s)Q(s)\right] = \text{чет}\ \left[q(-s)Q(s)\right]_{\beta=1/m_{1*}}$. Отсюда видно, что искомое число равно $\rho^-\left(B/A_1^+\right)$ - числу всех различных отрицательных корней многочлена $B(x)$, дающих положительное значение многочлену $A_1(x)$. Теперь найдем число всех различных вещественных отрицательных корней многочлена $B(x)$, при которых годограф пересекает интервал вещественной оси $(-1{,}0)$. Положим $\beta = 1$. Тогда

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + \beta = A_2(x)/\left|q(j\omega)\right|^2, \tag{10}$$

где $A_2\left(s^2\right) = \text{чет}\ \left[q(-s)Q(s)\right]_{\beta=1}$. Отсюда, искомое число равно $\rho^-\left(B/A_2^+\right)$ - числу всех различных отрицательных корней $B(x)$, дающих положительное значение многочлену $A_2(x)$. Число всех различных вещественных отрицательных корней многочлена $B(x)$ при которых годограф пересекает интервал вещественной оси $\left(-1,-1/m_{1*}\right)$ равно разности найденных чисел $\rho^{-}\left(B/A_2^{+}\right)-\rho^{-}\left(B/A_1^{+}\right)$. Таким образом, условие

$$\rho^{-}\left(B/A_2^{+}\right)=\rho^{-}\left(B/A_1^{+}\right) \tag{11}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы годограф $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ не пересекал вещественную ось в интервале $\left(-1,-1/m_{1*}\right)$, и, следовательно, чтобы рассматриваемая система имела запас устойчивости по амплитуде справа не менее заданного m_{1*}.

Для того, чтобы система имела запас устойчивости по амплитуде не менее заданного m_{2*} слева необходимо и достаточно, чтобы годограф $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ не имел пересечений с вещественной осью в интервале $\left(-m_{2*},-1\right)$.

Определим число всех вещественных отрицательных корней многочлена $B(x)$ при которых годограф пересекает вещественную ось в интервале $\left(-m_{2*},-1\right)$. Как отмечалось выше, число $\rho^{-}\left(B/A_2^{+}\right)$ - определяет число пересечений годографом вещественной оси в интервале $(-1,0)$. Найдем число пересечений годографом вещественной оси в интервале $\left(-m_{2*},0\right)$. Положим $\beta=m_{2*}$. Тогда, согласно (3)

$$\operatorname{Re} W(j\omega)+\beta = A_3(x)/\left|q(j\omega)\right|^2 \tag{12}$$

где $A_3(x)$ определяется по аналогии с многочленами $A_1(x)$, $A_2(x)$. Очевидно, что искомое число равно $\rho^{-}\left(B/A_3^{+}\right)$. Разность же $\rho^{-}\left(B/A_3^{+}\right)-\rho^{-}\left(B/A_2^{+}\right)$ определяет число пересечений годографом интервала вещественной оси $\left(-m_{2*},-1\right)$. Таким образом, условие

$$\rho^{-}\left(B/A_3^{+}\right)=\rho^{-}\left(B/A_2^{+}\right) \tag{13}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы запас устойчивости по амплитуде слева был не менее заданного m_{2*}.

3. Для определения запасов устойчивости по фазе заметим, что корни многочлена $E(x)$ (см.(8)) определяют значения частот при которых $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ пересекает единичную окружность. Для того, чтобы система имела запас устойчивости по фазе не менее заданного μ_{1*} снизу, необходимо и достаточно, чтобы у годографа $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ не было общих точек с единичной окружностью в центральном угле μ_{1*}. Число всех пересечений годографа с единичной окружностью в нижней полуплоскости (в центральном угле π) равно $\rho^{-}\left(E/B^{+}\right)$, где $B(x)$ определя-

ется из соотношения (6). Полагая $\beta = \sin \mu_{1*}$, имеем с учетом соотношения (4),

$$\operatorname{Im} W(j\omega) + \beta = B_1(\omega) / \omega |q(j\omega)|^2, \tag{14}$$

где

$$B_1(\omega) = -B(-\omega^2) + \omega |q(j\omega)|^2 \sin \mu_{1*}. \tag{15}$$

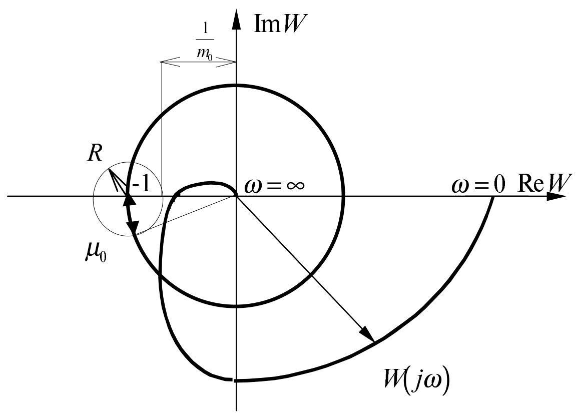

Рис. 4 "Радиальный" запас устойчивости системы $(r = 0)$

Перепишем многочлен $E(-\omega^2)$ в виде $\hat{E}(\omega)$. Тогда число всех пересечений годографом $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ единичной окружности в центральном угле $(\pi - \mu_{1*})$ равно $\rho^+(\hat{E}/B_1^-)$ - числу всех различных положительных корней многочлена $\hat{E}(\omega)$, дающих отрицательные значения многочлену $B_1(\omega)$.

Отсюда, условие

$$\rho^-(E/B^+) = \rho^+(\hat{E}/B_1^-) \tag{16}$$

является необходимым и достаточным, чтобы годограф не пересекал единичную окружность в центральном угле μ_{1*} и, следовательно, система имела запас устойчивости по фазе снизу не менее заданного μ_{1*}.

Аналогично, чтобы система имела запас устойчивости по фазе не менее заданного μ_{2*} сверху, необходимо и достаточно, чтобы у годографа не было общих точек с единичной окружностью в центральном угле μ_{2*}. Число всех пересечений годографа $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$ с единичной окружностью в верхней полуплоскости равно $\rho^-(E/B^-)$. Полагая $\beta = \sin \mu_{2*}$, имеем с учетом соотношения (4),

$$\operatorname{Im} W(j\omega) - \beta = B_2(\omega) / \omega |q(j\omega)|^2, \tag{17}$$

где

$$B_2(\omega) = -B(-\omega^2) - \omega |q(j\omega)|^2 \sin \mu_{2*}. \tag{18}$$

Тогда число всех пересечений годографом единичной окружности в центральном угле $(\pi - \mu_{2*})$ равно $\rho^+(\hat{E}/B_2^+)$. Отсюда, условие

$$\rho^-\left(E/B^-\right)=\rho^+\left(\hat{E}/B_2^+\right) \tag{19}$$

является необходимым и достаточным, чтобы годограф не пересекал единичную окружность в центральном угле μ_{1*} и, следовательно, система имела запас устойчивости по фазе снизу не менее заданного μ_{1*}.

4. Другой подход к оценке запасов устойчивости рассматриваемой системы иллюстрирует рис. 4. Условие

$$\left|1+W(j\omega)\right|^2 \geq R^2,\ \ \omega\geq 0 \tag{20}$$

означает для устойчивой системы, что годограф $W(j\omega)$, $\omega\geq 0$ не пересекает круг радиуса $R<1$ с центром в точке $(-1, j0)$, и система имеет запасы устойчивости по амплитуде и фазе не меньше значений $m_0(R)$, $\mu_0(R)$, определяемых величиной R. Можно говорить поэтому просто о "радиальном" запасе. С помощью многочлена $N\left(s^2\right)=\hat{q}(s)\hat{q}(-s)-$ $-R^2p(s)p(-s)$, где $\hat{q}(s)=q(s)+p(s)$, неравенство (20) можно записать в виде $N(x)\geq 0$, $x\leq 0$, и поскольку $N(-\infty)>0$, его нарушение возможно только вместе с изменением знака многочлена. Из этого следует, что условие $\rho^-(N)=0$ означает, что "радиальный" запас больше R, а условие

$$\rho_1^-(N)+\rho_3^-(N)+\ldots+\rho_{2l+1}^-(N)=0, \tag{21}$$

или

$$\rho_2^-(N)+\rho_4^-(N)+\ldots+\rho_{2l}^-(N)=\rho^-(N), \tag{22}$$

что он не меньше этой величины, где l - определяет наивысшую четную и нечетную кратности.

5. Для вычисления характерных чисел в полученных соотношениях применим алгоритмы решения общей проблемы Рауса [1],[2],[3] в основе которых лежат обобщенные таблицы Рауса чисел c_k^i, $i=1,\ldots,n_k$; $k=1,\ldots,p$, где первые две строки задаются, а остальные вычисляются по правилу Рауса, дополненному правилом сдвига элементов вспомогательной строки. Переход от двух предшествующих строк $c_{k-2}^i, c_{k-1}^i, i=1,2\ldots$ к последующей c_k^i, $i=1,2,\ldots$ осуществляется после вычисления элементов вспомогательной строки

$$r_k^i=c_{k-2}^i-\frac{c_{k-2}^1}{c_{k-1}^1}c_{k-1}^i,\ \ i=1,2,\ldots\ . \tag{23}$$

Здесь $r_k^1=0$. В общем случае $r_k^2=0, r_k^3=0,\ldots$ но $r_k^{m_k}\neq 0$. Тогда $c_k^i=(-1)^{m_k}\,r_k^{m_k-1+i}$, $i=1,2,\ldots$. Это и есть правило сдвига.

Последней строкой простой таблицы $(k=p)$ является строка, после которой возникает нулевая вспомогательная. Расширенная таблица всегда завершается парой строк, каждая из которых имеет только один ненулевой элемент. При построении расширенной таблицы при возникновении нулевой вспомогательной строки с числом элементов больше одного переход к следующей строке осуществляется по правилу дифференцирования. Предшествующая строка является индикаторной [3]. Для нумерации индикаторных строк будем использовать обозначения $p_1, p_2, ..., p_v$, где v - номер завершающего фрагмента таблицы. Тогда p_i-я и p_i+1-я строки будут иметь вид

$$\begin{array}{ccccc} c_{p_i}^1 & c_{p_i}^2 & \ldots & c_{p_i}^{n_{p_i}-1} & c_{p_i}^{n_{p_i}} \\ (n_{p_i}-1)c_{p_i}^1 & (n_{p_i}-2)c_{p_i}^1 & \ldots & c_{p_i}^{n_{p_i}-1} & 0 \end{array}$$

Пусть $P(x_1, ..., x_m)$ означает число перемен знака в конечной последовательности m отличных от нуля чисел $x_1, ..., x_m$. Тогда используя основные теоремы решения общей проблемы Рауса [2], по построенным таблицам можем определить:

1) по простой обобщенной таблице -

а) индексы Коши функции $\Phi(x) = H(x)/Q(x)$, где

$$Q(x) = a_0 s^q + a_1 s^{q-1} + \ldots + a_{q-1}s + a_q, \tag{24}$$

$$H(x) = b_0 s^h + b_1 s^{h-1} + \ldots + b_{h-1}s + b_h, \tag{25}$$

относительно открытых полуосей $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$,

$$I_{-\infty}^0 \Phi(x) = P(l_1, ..., l_p) - P(c_1^1, ..., c_p^i), \tag{26}$$

$$(-1)^0 I_0^{+\infty} \Phi(x) = P(\beta_1, ..., \beta_p) - P(\alpha_1, ..., \alpha_p), \tag{27}$$

где $l_k = (-1)^{n_k} c_k^{n_k}$, n_k - номер последнего ненулевого элемента в k-й строке, $\alpha_k = \mu_k c_k^1$, $\beta_k = \mu_k c_k^{n_k}$, $k = 1,2,...$, $\mu_k = \mu_{k-2}(-1)^{m_k}$, $k = 3,4,...$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$;

б) число всех различных корней многочлена $Q(x)$ в интервале (α, β), дающих положительные или отрицательные значения многочлену $H(x)$,

$$2\rho(Q/H^+) = \rho(Q) - \rho(C) + I_\alpha^\beta H(x)\, Q'(x)/Q(x), \tag{28}$$

$$2\rho(Q/H^-) = \rho(Q) - \rho(C) - I_\alpha^\beta H(x)\, Q'(x)/Q(x), \tag{29}$$

где (α, β) - один из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, $C(x)$ - наибольший общий делитель многочленов $Q(x)$ и $H(x)$, коэффициенты которого определяет последняя строка таблицы Рауса для вычисления индексов (26), (27); $\rho(F)$ означает число всех различных корней многочлена $F(x)$ в интервале (α,β). Здесь в качестве исходных строк обобщенной табл и-цы Рауса принимаются строки:

1. при $\sigma = q-h-1 \geq 0$

$c_1^i = a_{i-1}$, $i=1,\ldots,q+1$, $c_2^i = (-1)^\sigma b_{i-1}$, $i=1,\ldots,h+1$; $c_2^i = 0$, $i > h+1$;

2. при $\sigma = h+1-q \geq 1$

$c_1^i = (-1)^\sigma a_{i-1}$, $i=1,\ldots,q+1$, $c_1^i = 0$, $i > q+1$; $c_2^i = b_{i-1}$, $i=1,\ldots,h+1$.

2) по расширенной обобщенной таблице -

а) число всех различных отрицательных ρ^- и число всех различ-ных положительных ρ^+ вещественных корней, например, многочлена $Q(x)$

$$\rho^-(Q) = P\left(l_1,\ldots,l_{p_2}\right) - P\left(c_1^1,\ldots,c_{p_2}^i\right), \tag{30}$$

$$\rho^+(Q) = P\left(\beta_1,\ldots,\beta_{p_2}\right) - P\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p_2}\right), \tag{31}$$

б) Число всех отрицательных ρ_i^-, число всех различных полож и-тельных ρ_i^+ корней кратности i

$$\begin{aligned}\rho_i^- = {} & P\left(l_{p_i},\ldots,l_{p_{i+1}}\right) - P\left(c_{p_i}^1,\ldots,c_{p_{i+1}}^1\right) + P\left(c_{p_{i+1}}^1,c_{p_{i+1}+1}^1,\ldots,c_{p_{i+2}}^1\right) - \\ & - P\left(l_{p_{i+1}},l_{p_{i+1}+1},\ldots,l_{p_{i+2}}\right),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\rho_i^- = {} & (-1)^{p_i+1}\left[P\left(\beta_{p_i},\ldots,\beta_{p_{i+1}}\right) - P\left(\alpha_{p_i},\ldots,\alpha_{p_{i+1}}\right)\right] - \\ & -(-1)^{p_i+1}\left[P\left(\beta_{p_{i+1}},\beta_{p_{i+1}+1},\ldots,\beta_{p_{i+2}}\right) - P\left(\alpha_{p_{i+1}},\alpha_{p_{i+1}+1},\ldots,\alpha_{p_{i+2}}\right)\right].\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь в качестве исходных строк таблицы принимаются

$c_1^1 = a_{i-1}$, $i=1,\ldots,q+1$, $c_2^i = (q+1-i)c_1^1$, $i=1,\ldots,q+1$, так что к индикато р-ным относится и первая строка таблицы $(p_1 = 1)$.

Заключение. Предложенное алгебраическое решение задач оценки запасов устойчивости систем с единичной отрицательной обратной связью представляет собой эффективную альтернативу прямому реш е-нию задач поточечным построением частотных годографов, что ос о-бенно важно при машинных расчетах сложных систем. Обобщенный алгоритм Рауса может использоваться в качестве универсальной в ы-числительной процедуры как для анализа устойчивости системы (по х а-рактеристическому многочлену замкнутой системы), так и для оценки ее важнейших качественных показателей - запасов устойчивости по а м-плитуде и фазе.

Список использованной литературы

1. *Барабанов А. Т.* Метод Рауса в теории систем. I. Обобщенные проблемы Рауса в задачах теории систем // Изв. АН. СССР. Техн. кибернетика. 1991. №1. с. 35-44. 2. *Его же,* Полное решение общей проблемы Рауса в теории систем. II. // Изв. АН. СССР. Техн. кибернетика. 1991. №2. с. 39-47. 3. *Его же,* Анализ распределения корней многочлена на основе обобщенной схемы Рауса. Динам. системы. 1994. Вып 13. с 107-118.

Поступило в редколлегию 21.02.97