УДК 62-50

А. Т. БАРАБАНОВ, д-р техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЗАДАННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО МИНИМАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ ВЕКТОРОВ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Рассматриваются линейные стационарные системы, заданные уравнениями состояния. Предлагается построение изображений по Лапласу собственного движения системы и ее реакций с помощью минимальных многочленов векторов пространства состояний, а также столбцов и строк матриц распределения входов и выходов системы. Указанные минимальные многочлены являются основным конструктивным элементом описания изображений процессов в системе. Предлагаемый подход развивает и формализует в современной форме метод А. Н. Крылова.

1. Будем рассматривать линейную стационарную систему, заданную во временной области уравнениями состояния и выходов

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),\ t \geq 0,\ x(0) = x_0, \\ &y = c^T x, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ вектор состояния, A - $n \times n$ заданная матрица коэффициентов, $f(t) \in R^n$ - заданная вектор функция, $c \in R^n$ - вектор, определяющий выбор выхода системы $y(t) \in R^1$. Традиционные подходы к построению заданного решения системы (1) так или иначе связаны с задачей обращения характеристической матрицы $(sI - A)$. Например, преобразование Лапласа системы (1), сразу же алгебраизируя задачу, приводит в области изображений к соотношению

$$y(s) = c^T (sI - A)^{-1} \hat{f}(s), \quad \hat{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} + x_0 .$$

Формирование представления для обратной матрицы

$$(sI - A)^{-1} = \mathscr{P}(s)/\Delta(s),$$

где $\Delta(s)$ - характеристический многочлен, а $\mathscr{P}(s)$ - присоединенная (многочленная) матрица системы, представляет собою основную часть задачи. Последующее восстановление оригинала осуществляется уже сравнительно просто с помощью "техники" разложения изображения на простейшие дроби или теории вычетов (и здесь рассматриваться не будет). Аналогичное место принадлежит задаче представления указанной обратной матрицы и в других подходах к построению заданного решения системы (1). Вычисление элементов этого представления выполняется либо с помощью миноров характеристической матрицы, включая характеристический определитель, либо методами типа Фаддеева-Леверрье. С повышением размерности системы сложность вычислений быстро возрастает. К тому же дело сильно осложняется при необходимости (например, в задачах анализа неасимптотической устойчивости) устранения общих нулей числителя и знаменателя представления, т.е. приведения его к виду

$$\mathscr{P}(s)/\Delta(s) = \Pi(s)/\mathscr{D}(s),$$

где $\Pi(s)$ - приведенная присоединенная матрица и $\mathscr{D}(s)$ - минимальный многочлен матрицы A взаимно просты [1]. Известно преобразование акад. А. Н. Крылова системы (1), которое существенно упрощает вычисление коэффициентов характеристического многочлена и алгебраическая интерпретация Ф. Р. Гантмахера этого преобразования [1] (там же библиография по исследованию метода). В этой интерпретации характеристический многочлен в так называемом регулярном случае строится эффективным процессом исключения типа Гаусса как минимальный многочлен произвольно взятого вектора $l \in R^n$. По существу, регулярный случай определен как такой, когда минимальный многочлен выбранного вектора совпадает с характеристическим. Если это не так (степень минимального многочлена меньше степени n характеристического, и первый является лишь делителем второго), то метод не дает полного результата, поскольку не определена в общем виде роль минимальных многочленов векторов пространства R^n в конструкции заданного решения системы. В связи со сказанным описание этой роли представляется достаточно интересным и важным и является предметом нашего последующего изложения.

2. Напомним для удобства определения и отметим необходимые для дальнейшего свойства аннулирующих и минимальных многочленов [1]. Пусть рассматривается пространство состояний R^n системы с базисом $e^1,\dots,e^n$.

Определение1. Многочлен

$$\delta(s) = s^p + \delta_1 s^{p-1} + \dots + \delta_k s^{p-k} + \dots + \delta_{p-1} s + \delta_p \tag{2}$$

называют аннулирующим многочленом матрицы A (аннулирующим многочленом пространства R^n относительно матрицы A), если

$$\delta(A) = A^p + \delta_1 A^{p-1} + \dots + \delta_k A^{p-k} + \dots + \delta_{p-1} A + \delta_p I = 0, \tag{3}$$

где I - единичная матрица. Многочлен минимальной степени в множестве аннулирующих многочленов матрицы A называют минимальным многочленом матрицы A.

Замечание 1. Характеристический многочлен $\Delta(s) = \det(sI - A)$ матрицы A является ее аннулирующим многочленом (теорема Кели-Гамильтона).

Определение 2. Пусть $c \in R^n$ и $c^r = Ac^{r-1} = A^r c$, $r = 1,\ldots,p$; $c^0 = c$.
Условимся в обозначении

$$\delta(c) = c^p + \delta_1 c^{p-1} + \ldots + \delta_{p-1} c^1 + \delta_p c. \tag{4}$$

Многочлен (2) называют аннулирующим многочленом вектора с (относительно матрицы A), если $\delta(c) = \delta(A)c = 0$. Многочлен минимальной степени в множестве аннулирующих многочленов вектора c называют минимальным многочленом вектора c.

Определение 2 $'$. Пусть $c^{Tr} = c^{Tr-1}A = c^T A^r$, $r = 1,\ldots,p$; $c^{T0} = c^T$.
Условимся в обозначении

$$\delta\left(c^T\right) = c^{Tp} + \delta_1 c^{Tp-1} + \ldots + \delta_{p-1} c^{T1} + \delta_p c^T \tag{5}$$

Многочлен (2) называют аннулирующим многочленом вектора строки c^T (относительно матрицы A), если $\delta\left(c^T\right) = c^T \delta(A) = 0$. Многочлен минимальной степени в множестве аннулирующих многочленов вектора строки c^T называют минимальным многочленом вектора строки c^T.

Замечание 2. Аннулирующий многочлен $\delta(s)$ вектора строки c^T относительно матрицы A тождественно совпадает с таковым для вектора столбца c относительно матрицы A^T, поскольку

$$\left[\delta\left(A^T\right)c\right]^T = c^T \delta(A) = 0. \tag{6}$$

Замечание 3. Пусть определены минимальные многочлены $\delta_1(s),\ldots,\delta_n(s)$ базисных векторов $e^1,\ldots e^n$ пространства R^n соответственно. Тогда их наименьшее общее кратное (НОК) является мин имальным многочленом $\mathcal{D}(s)$ матрицы A

$$\mathcal{D}(s) = \text{НОК}\, \delta_1(s),\ldots,\delta_n(s). \tag{7}$$

Замечание 4. Пусть $\delta(s)$ минимальный многочлен какого-либо вектора строки или столбца). В ряду многочленов

$$\Delta(s),\ \mathcal{D}(s),\ \delta(s) \tag{8}$$

всякий многочлен является делителем предшествующего.

Замечание 5. Аннулирующий многочлен матрицы A является в то же время и аннулирующим многочленом вектора $c \in R^n$.

3. Построению модели заданного решения в области изображ ений предварим следующее

Утверждение 1. Для всякого многочлена

$$\delta(s) = s^m + \delta_1 s^{m-1} + \ldots + \delta_k s^{m-k} + \ldots + \delta_{m-1} s + \delta_m \tag{9}$$

имеет место тождество

$$\sum_{r=0}^{m-1} \delta_{r+1}(s) A^r = \sum_{r=0}^{m-1} \delta_{r+1}(A) s^r \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_1(s) = s^{m-1} + \delta_1 s^{m-2} + \ldots + \delta_{m-2} s + \delta_{m-1},\\
&\delta_2(s) = s^{m-2} + \delta_1 s^{m-3} + \ldots + \delta_{m-3} s + \delta_{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_r(s) = s^{m-r} + \delta_1 s^{m-r-1} + \ldots + \delta_{m-r-1} s + \delta_{m-r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{m-1}(s) = s + \delta_1,\\
&\delta_m(s) = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тождество (10) проверяется перегруппировкой слагаемых. Многочлены (11) будем называть сопутствующими многочленами. Запишем уравнения состояния в изображениях по Лапласу

$$sx(s) = Ax(s) + v(s), \quad v(s) = f(s) + x_0. \tag{12}$$

Далее с помощью этого соотношения найдем

0. $y(s) = c^T x(s)$,

1. $sy(s) = c^T Ax(s) + c^T v(s)$,

2. $s^2 y(s) = c^T A^2 x(s) + c^T (A + sI) v(s)$,

....

$m.$ $s^m y(s) = c^T A^m x(s) + c^T \left(A^{m-1} + sA^{m-2} + \ldots + s^{m-2} A + s^{m-1} I\right) v(s)$.

Умножая уравнения в указанном порядке на δ_m, δ_{m-1}, δ_{m-2}, ..., $\delta_0 = 1$ соответственно, складывая левые и правые части и принимая во внимание Утверждение 1. для многочлена (9), получим соотношения

$$\begin{aligned}
\delta(s) y(s) &= c^T \sum_{r=0}^{m-1} \delta_{r+1}(s) A^r v(s) + c^T \delta(A) x(s) =\\
&= c^T \sum_{r=0}^{m-1} \delta_{r+1}(A) s^r v(s) + c^T \delta(A) x(s).
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $\delta(s)$ - аннулирующий многочлен вектора строки c^T, т.е. $c^T \delta(A) = 0$. Тогда из тождества (13) находим явное выражение для выхода системы

$$y(s) = \phi^T(s) v(s) / \delta(s), \tag{14}$$

где векторный многочлен $\phi(s)$ определен выражениями

$$\phi^T(s) = \sum_{r=0}^{p-1} \delta_{r+1}(s) c^{Tr} = \sum_{r=0}^{p-1} \delta_{r+1}(c^T) s^r \tag{15}$$

в соответствии с обозначениями определения 2.

Замечание 6. В частности, в соответствии с замечаниями 5.,3. в соотношении (14) в качестве $\delta(s)$ могут быть выбраны многочлены $\Delta(s)$, $\mathscr{D}(s)$ с соответствующим определением по соотношениям (15) многочлена $\phi^T(s)$.

Выбирая в качестве аннулирующего многочлена минимальный вектора строки c^T, получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\delta(s)$ минимальный многочлен вида (2) вектора строки c^T; $\delta_r(s)$, $r=1,...p-1$ - его сопутствующие многочлены. Тогда заданное решение системы (1) определяет ее выход в изображениях по Лапласу в виде (14), (15), где строка многочленов $\phi^T(s)$ и многочлен $\delta(s)$ взаимно просты, т.е.

$$\phi^T(\lambda)\neq 0 \tag{16}$$

для всякого корня многочлена $\delta(s)$.

Доказательство теоремы 1. В связи с изложенным остается доказать последнее утверждение. Оно следует из того, что

$$\sum_{r=0}^{p-1}\delta_{r+1}(\lambda)c^{Tr}\neq 0. \tag{17}$$

Действительно, нетривиальные многочлены $\delta_1(s),...,\delta_p(s)$ при всяком s не обращаются одновременно в нуль (см. при $m = p$ и равных нулю значениях многочленов систему (11) относительно коэффициентов $\delta_0=1$, $\delta_1,...,\delta_{p-1}$ с определителем, равным 1). Поэтому линейные комбинации в левой части неравенства также не могут обратиться в нуль в силу определения минимального многочлена (равенство повлекло бы за собою следствие о возможности построения минимального многочлена степени, меньшей чем p).

4. Пусть $\Phi(t)=\{\varphi_{ij}(t)\}$, $i,j=1,...,n$ - переходная матрица и матричная экспонента $\Phi(t)=\exp At$. В силу уравнений

$$d\Phi(t)/dt = A\Phi(t),\ \ \Phi(0)=I \tag{18}$$

для изображения $R(s)=\{r_{ij}(s)\}=\mathscr{L}\{\Phi(t)\}$, $i,j=1,...,n$ имеем

$$R(s)=(sI-A)^{-1}, \tag{19}$$

и

$$AR(s)=R(s)A. \tag{20}$$

Последнее равенство легко усмотреть в силу экспоненциального представления переходной матрицы или, например, рассматривая матрицу

$$X(s)=(sI-A)^{-1}A-A(sI-A)^{-1},$$

для которой домножением слева и справа на $(sI-A)$ сразу находим $X(s)=0$ для $\forall\ s\neq\lambda$, где λ - корень характеристического многочлена $\det(sI-A)$ матрицы A. Из (18) следует, что для "j" - столбца матрицы $\Phi(t)$ будем иметь уравнение (1) при $f(t)=0$ и $x_0=e^j=(0...1...0)^T$ с единичной j-той компонентой. Пусть $\phi^{Ti}(s)$ вектор строка многочленов, определенных соотношением (15) при $c^T=e^{iT}=(0...1...0)$ с единичной i-той компонентой, и пусть $\phi_{ij}(s)$, $j=1,...,n$ - компоненты этого вектора строки. Полагая в (14) $v(s)=e^j$, $c^T=e^{iT}$, находим по соотношениям (14), (15) изображение i,j-го элемента переходной матрицы

$$r_{ij}(s)=\phi_{ij}(s)/\delta_i(s), \tag{21}$$

где $\delta_i(s)$ - минимальный многочлен вектора строки e^{iT}, а многочлен $\phi_{ij}(s)$ определен соотношениями

$$\phi_{ij}(s)=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{ir+1}(s)\zeta_{ij}^r=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{ir+1}(\zeta_{ij})s^r, \tag{22}$$

где p_i - степень многочлена $\delta_i(s)$, $\delta_{ir+1}(s)$, $r=0,...p_i-1$ - его сопутствующие многочлены и

$$\zeta_{ij}^r=e^{iTr}e^j=\left(e^{iTr}\right)_j=e^{iT}A^re^j=\left(A^r\right)_{ij}, \tag{23}$$

где $i,j=1,...,n$; $r=0,...p_{i-1}$; $e^{iT0}=e^{iT}$, $A^0=I$.

Значения $\delta_{ir+1}(\zeta_{ij})$ вычисляются формальной заменой $s^k=\zeta_{ij}^k$, $r=0,1,..$ в силу определения (2 ′). Заметим, что для многочленного вектора строки $\phi^{Ti}(s)$ имеем неравенство (16). Значит для всякого корня λ многочлена $\delta_i(s)$ среди значений $\phi_{ij}(\lambda)$, $j=1,...,n$ найдется хотя бы одно отличное от нуля, поскольку $\phi_{ij}=\left(\phi^{Ti}\right)_j$. Вернемся теперь к соотношениям (13) и заметим, что при

$$x(s)=R(s)x_0$$

будем иметь в силу соответствия (19)

$$c^T\delta(A)R(s)x_0=c^TR(s)\delta(A)x_0. \tag{24}$$

Пусть $\varphi^j(s)$ вектор столбец многочленов, определенный по многочлену $\delta_j(s)$ соотношениями

$$\varphi^j(s)=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{ir+1}(s)e^{jr}=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{ir+1}\left(e^j\right)s^r \tag{25}$$

в силу соотношений (10), (4) при $c = e^j = (0 \ldots 1 \ldots 0)^T$ с единичной j-той компонентой. Пусть $\delta_j(s)$ минимальный многочлен вектора e^j и следовательно, $\delta_j(A)e^j = 0$.

Полагая в (13) $v(s) = x_0 = e^j$, $c^T = e^{iT}$ получаем для "i,j"-го элемента изображения переходной матрицы

$$r_{ij}(s) = \varphi_{ij}(s) / \delta_j(s) \tag{26}$$

где $\delta_j(s)$ - минимальный многочлен вектора e^j, а многочлен $\varphi_{ij}(s)$ определен соотношениями

$$\varphi_{ij}(s) = \sum_{r=0}^{p_j-1} \delta_{jr+1}(s) \zeta_{ij}^r = \sum_{r=0}^{p_j-1} \delta_{jr+1}(\zeta_j) s^r , \tag{27}$$

где p_j - степень многочлена $\delta_j(s)$, $\delta_{jr+1}(s)$, $r = 0, \ldots p_j - 1$ - его сопутствующие многочлены и

$$\zeta_{ij}^r = e^{iT} e^{jr} = \left(e^{ir}\right)_i = e^{iT} A^r e^j = \left(A^r\right)_{ij},$$

где $i, j = 1, \ldots, n$; $r = 0, \ldots p_j - 1$; $e^{j0} = e^j$, $A^0 = I$. Значения $\delta_{jr+1}(\zeta_j)$ вычисляются формальной заменой $s^k = \zeta_{ij}^k$, $r = 0, 1, \ldots$ в силу определения (4).

Заметим, что для многочленного вектора (25) справедливо неравенство $\varphi^j(\lambda) \neq 0$ (доказательство аналогично доказательству неравенства (17)) для всякого корня λ многочлена $\delta_j(s)$. Значит среди значений $\varphi_{ij}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$ найдется хотя бы одно отличное от нуля, поскольку $\varphi_{ij} = e^{iT} \varphi^j = \left(\varphi^j\right)_i$. Изложенное доказывает справедливость следующей теоремы.

Теорема.2

1. Пусть $\delta_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$ - минимальные многочлены вида векторов строк e^{iT}; $i = 1, \ldots, n$ соответственно, p_i, $i = 1, \ldots, n$ их степени, а $\delta_{ir}(s)$, $r = 1, \ldots p_i$; $i = 1, \ldots, n$ - сопутствующие многочлены. Тогда для изображения переходной матрицы $R(s)$ справедливо представление

$$R(s) = \mathrm{diag}\left[1/\delta_1(s), \ldots 1/\delta_n(s)\right] \psi(s), \tag{28}$$

где $\psi(s) = \left\{\phi_{ij}(s)\right\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ - многочленная матрица, компоненты которой определены соотношениями (22). Для всякого корня λ минимального многочлена $\delta_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$ среди значений $\phi_{ij}(\lambda)$, $j = 1, \ldots, n$ найдется отличное от нуля.

2. Пусть $\delta_j(s)$, $j=1,\dots,n$ - минимальные многочлены векторов e^j, $j=1,\dots,n$ соответственно, p_j, $j=1,\dots,n$ - их степени, а $\delta_{jr}(s)$, $r=1,\dots,p_j$ $j=1,\dots,n$ - сопутствующие многочлены. Тогда для изобр а-жения переходной матрицы $R(s)$ справедливо представление

$$R(s)=\Phi(s)\mathrm{diag}\left[1/\delta_1(s),\dots 1/\delta_n(s)\right], \qquad (29)$$

где $\Phi(s)=\left\{\varphi_{ij}(s)\right\}$, $i,j=1,\dots,n$ - многочленная матрица, компоненты к о-торой определены соотношениями (27). Для всякого корня λ минимального многочлена $\delta_j(s)$, $j=1,\dots,n$ среди значений $\varphi_{ij}(\lambda)$, $i=1,\dots,n$ найдется отличное от нуля.

5. Рассмотрим теперь реакцию системы на возмущающие возде й-ствия, заданные в форме, принятой в теории управления для описания управляющих воздействий. Пусть сначала

$$f(t)=bu(t),\ \ b\in R^n,\ \ u(t)\in R^1.$$

Тогда

$$x(s)=R(s)bu(s). \qquad (30)$$

Последнее слагаемое в соотношениях (13) запишем в силу равенства (20)

$$c^T\delta(A)x(s)=c^TR(s)\delta(A)bu(s). \qquad (31)$$

Пусть $\delta(s)$ минимальный многочлен степени p вектора b с сопутствующими многочленами $\delta_r(s)$, $r=1,\dots p$. Тогда из соотношения (13) получаем для ре акции на выходе

$$y(s)=c^T\beta(s)u(s)/\delta(s), \qquad (32)$$

где

$$\beta(s)=\sum_{r=0}^{p-1}\delta_{r+1}(s)b^r=\sum_{r=0}^{p-1}\delta_{r+1}(b)s^r\ , \qquad (33)$$

$$b^r=Ab^{r-1}=A^rb,\ r=1,\dots p-1;\ b^0=b,$$

причем векторный многочлен $\beta(s)$ и многочлен $\delta(s)$ взаимно просты. Пусть теперь

$$f(t)=Bu(t),\ \ B=\left[b^1\dots b^m\right],\ \ u(t)\in R^m. \qquad (34)$$

где B - $m\times n$ матрица со столбцами $b^j\in R^n$, $j=1,\dots,m$. Пусть $\delta_j(s)$ минимальный многочлен степени p_j вектора b^j, $j=1,\dots,n$. Записывая $f(t)$ и $y(t)$ соответственно в виде

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m} b^j u_j(t),\; y(t)=\sum_{j=1}^{m} y_j(t), \tag{35}$$

где $y_j(t)$ - реакция на воздействие $f^j(t)=b^j u_j(t)$, будем иметь с учетом соотношения (32)

$$y(s)=c^T\sum_{j=1}^{m}\beta^j(s)u_j(s)/\delta_j(s), \tag{36}$$

где

$$\beta^j(s)=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{jr+1}(s)b^{jr}=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{jr+1}\left(b^j\right)s^r, \tag{37}$$

$$b^{jr}=Ab^{jr-1}=A^r b^j,\; r=1,\ldots p_j-1;\; b^{j0}=b^j,$$

причем векторные многочлены $\beta^j(s)$ и многочлены $\delta_j(s)$, $j=1,\ldots,n$ соответственно взаимно просты. Равенства (37) в покомпонентной форме можно записать в виде

$$\beta_{ij}(s)=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{jr+1}(s)\zeta_{ij}^r=\sum_{r=0}^{p_j-1}\delta_{jr+1}(\zeta_{ij})s^r, \tag{38}$$

$$\zeta_{ij}^r=e^{iT}b^{jr}=\left(b^{ir}\right)_i=\left(A^r b^j\right)_i,$$

где $i,j=1,\ldots,n$; $r=0,\ldots p_j-1$; $b^{j0}=b^j$, $A^0=I$. Переходя к матричной форме записи соотношения (36), будем иметь на основании изложе н-ного следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\delta_j(s)$, $j=1,\ldots,n$ - минимальные многочлены с о-ответственно векторов b^j; $j=1,\ldots,n$ - столбцов матрицы B, p_j, $j=1,\ldots,n$ их степени, а $\delta_{jr}(s)$, $r=1,\ldots p_j$; $j=1,\ldots,n$ - сопутствующие многочлены. Для изображения реакции системы $y(s)$ на воздействие (34) справедливо предста вление

$$y(s)=c^T\beta(\mathrm{s})\mathrm{diag}\left[1/\delta_1(s),\ldots 1/\delta_m(s)\right]u(s),$$

где многочленная матрица $\beta(s)$ определена равенством

$$\beta(s)=\left\|\beta^1(s)\ldots\beta^m(s)\right\|=\left\{\beta_{ij}(s)\right\},\; i=1,\ldots,n;\; j=1,\ldots,m$$

со столбцами (37) и элементами (38).

Для всякого корня λ многочлена $\delta_j(s)$, $j=1,\ldots,n$ среди значений $\beta_{ij}(\lambda)$, $i=1,\ldots,n$ найдется отличное от нуля.

6. Напомним теперь вычислительную процедуру построения м и-нимального многочлена вектора. Рассмотрим последовательность векторов $c, c^1 = Ac, \ldots, c^k = Ac^{k-1}, \ldots$. Будем записывать в строчку их компоненты

$$\begin{matrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^r & c_2^r & \ldots & c_n^r, \end{matrix}$$

вычисляя миноры образующейся матрицы при $r = 2,3,\ldots$. Если на очередном шаге $r < n$ среди миноров $r+1$-го порядка найдется хотя бы один отличный от нуля, то $r+1$ строк матрицы линейно независимы, и следует переходить к следующему шагу $r+1$. Когда в первый раз, ск а-жем при $r = p$ все миноры , $p+1$-го порядка оказываются равными нулю (в силу конечно-мерности пространства $p \le n$), имеем минимал ь-ную линейную комб инацию

$$c^p + \delta_1 c^{p-1} + \ldots + \delta_{p-1} c^1 + \delta_p c = 0 \tag{39}$$

Для вычисления ее коэффициентов $\delta_1,\ldots,\delta_p$ заметим, что при $r = p-1$ среди миноров p-го порядка записанной выше матрицы найдется хотя бы один отличный от нуля. Пусть $i_1,\ldots,i_p$ - номера столбцов этого м и-нора. Тогда из равенства (38), записывая его в координатной форме, получаем систему ура внений

$$\delta_1 c_{i_k}^{p-1} + \delta_2 c_{i_k}^{p-2} + \ldots + \delta_{p-1} c_{i_k}^1 + \delta_p c_{i_k} = -c_{i_k}^p,\ k = 1,\ldots,p$$

для коэффициентов $\delta_1, \ldots, \delta_{p-1}, \delta_p$ с неравным нулю определит елем.

Таким образом, для вычисления коэффициентов минимального многочлена необходимы лишь вычисления числовых определителей, в чем и состоит основной эффект предложенного А. Н. Крыловым пр е-образования. Линейную комбинацию (39) можно построить и не пр и-бегая к вычислению определителей. Для этого формируется послед о-вательность векторов [1]

$$c^{*0} = c,\ c^{*1} = Ac^{*0} + \gamma_0^1 c^{*0},\ c^{*2} = Ac^{*1} + \gamma_0^2 c^{*0} + \gamma_1^2 c^{*1},\ \ldots.$$

Числа $\gamma_0^r, \gamma_1^r, ..\gamma_{r-1}^r$; $r = 1,2,..$ выбираются из условия наращивания числа нулевых компонент векторов c_*^r, $r = 1,2,...$ Если на некотором шаге ($r = p \leq n$) в первый раз оказывается, что $c^{*p} = 0$, то тем самым и достигается построение линейной комбинации (39), т.к. векторы c^{*r} линейно зависимые от векторов c, $c^1 = Ac,...,c^{r-1} = A^{r-1}c$; $r = 1,2,...$. Имеем процесс типа процесса исключения Гаусса. При $p = n$ имеем регулярный случай с результатом в виде характеристического определителя матрицы A. В общем случае указанными способами можно получить совокупность минимальных многочленов различных векторов, необходимую для представления заданного решения системы (1) в соответствии с предложенными теоремами. Изложенные методы построения изображений по Лапласу заданных решений, которые можно рассматривать как развитие метода А. Н. Крылова в форме, характерной для современной теории управления, предоставляют возможности анализа линейных стационарных систем, свободные от проблемы характеристического (векового) определителя системы.

Список использованной литературы

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., Наука, 1966, 575 с.

Поступила в редколлегию 06.02.98