МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95

Е. П. БЕЛАН, канд. физ.-мат. наук,
Симфероп. ун-т

ПОСТРОЕНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Получены достаточные условия существования инерциального многообразия параболического уравнения с монотонной нелинейной частью, рассматриваемого в ограниченной области, размерность которой не превосходит 3. Доказано существование инерциального многообразия для уравнения реакции – диффузии, рассматриваемого на двумерном торе.

1. В этой работе найдены условия существования инерциального многообразия (ИМ) для рассматриваемого в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \le 3)$ с гладкой границей уравнения

$$\partial_t u + Au - \lambda u + f(u) + g = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{i,j}(x)\partial_j u\right), \tag{2}$$

$g \in L_2(\Omega)$, $\lambda \ge 0$, $a_{i,j} \in L_\infty(\Omega)$ и

$$a_{i,j} = a_{j,i}, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu_0 \|\xi\|^2 \tag{3}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \subset \mathbf{R}^n$ и некоторого $\mu_0 > 0$. Предполагается, что функция $f(u) \in C^1(\mathbf{R})$ и удовлетворяет условиям

$$f(u)u \ge \mu_0 |u|^{p_0}, \quad f(0) = 0, \tag{4}$$

$$f'(u) \ge 0, \ |f'(u)| \le C\left(1 + |u|^{p_0 - 2}\right), \tag{5}$$

где $p_0 > 2$, C – постоянная.

Тщательный анализ свойств полугруппы $\{S_t\}$, порождаемой уравнением (1), выполнен в [1].

Техника, используемая в этой работе для построения ИМ уравнения (1), восходит к работе [2]. В связи с задачей о возмущении инвариантных многообразий полулинейных параболических уравнений метод Коппеля-Пальмера был обобщен и модернизирован в работе [3]. Техника Коппеля-Пальмера использована в [4] для построения це н-тральных многообразий квазилинейных параболических уравнений. Построение ИМ уравнения (1) осуществляется построением фазовых кривых составляющих это многообразие. Для построения этих фаз о-вых кривых привлекается метод компактности, метод монотонных операторов [1, 5, 6].

Проблема построения ИМ для уравнений типа реакции – дифф у-зии, близкая к рассматриваемой здесь проблеме, исследовалась в ряде работ (см. [3, 7-13] и указанную в них литературу).

2. На области определения $D\left(A^{s/2}\right)$ оператора $A^{s/2}$ определим норму $\|\cdot\|_s$ по формуле $\|u\|_s^2 = < A^{s/2} u, A^{s/2} u >$. Норма, вводимая таким образом, эквивалентна норме в пространстве Соболева $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{R}_+$. Обозначим $H = L_2(\Omega)$. Пусть $\{S_t\}$ полугруппа, соответствующая ура в-нению (1).

В [1] показано, что полугруппа $\{S_t\}$ имеет H-поглощающее множество G, которое ограничено в $H^2(\Omega)$.

Пусть $\{e_j,\ j=1,..\}$. ортонормированный базис в H такой, что

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots, \quad \lim \lambda_k = \infty, \quad e_k|_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим случай $n = 3$. Зафиксируем целое N и предположим, что $\lambda_{N+1} - \lambda > 0$. Для определенности пусть $\lambda_N - \lambda > 0$. Обозначим $P = P_N$ – ортогональный проектор в H на пространство, образованное первыми N собственными векторами оператора A, $Q = I - P$. Выберем $2\alpha \in (3/2, 2)$. Согласно теореме вложения Соболева $H^{2\alpha}(\Omega) \subset C(\Omega)$. Из вложения $H^2(\Omega) \subset H^{2\alpha}(\Omega)$ следует, что S_t обладает H – поглощающим множеством G ограниченным в $H^{2\alpha}(\Omega)$. Обозначим $H_0^{2\alpha}(\Omega) = V$, $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{2\alpha}$. Предположим, что $G \subset \{u : \|u\|_V < \rho/2\}$. Пусть $\theta(u)$ – гладкая функция θ: $PV \to [0,1]$, удовлетворяющая условиям: $\theta(u) = 1$, $\|u\|_V \le 1$; $\theta(u) = 0$, $\|u\|_V \ge 2$; $\|\theta'(u)\| \le 2$, $\|\theta''(u)\| \le 4$ для $u \in PV$. Обозначим $Pu = p$, $Qu = q$. Положим $B(u) = f(u)$, $B\left(p\theta\left(p\rho^{-1}\right) + q\right) = B_\theta(p, q)$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &p_t + Ap - \lambda p + PB_\theta(p,q) + Pg = 0, \\ &q_t + Aq - \lambda q + QB_\theta(p,q) + Qg = 0, \quad q|_{\partial\Omega=0}. \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно [1], условия (3) и теореме вложения Соболева, существуют положительные постоянные M_1, M_2 такие, что

$$\|B_\theta(p,q)\| \le M_1,$$
$$\|B_\theta(p_1,q_1) - B_\theta(p_2,q_2)\| \le M_2(\|p_1 - p_2\| + \|q_1 - q_2\|) \tag{7}$$

для всех (p,q), (p_i,q_i), $i = 1,2$, удовлетворяющих неравенствам $\|q\|_V \le p$, $\|q_i\|_V \le \rho$, $i = 1,2$.

Из [1] следует, что неравенство

$$< B_\theta(p,q_1) - B_\theta(p,q_2),\ q_1 - q_2 > \ge 0 \tag{8}$$

выполняется для всех $p \in PV$, $q_i \in QV$, $i = 1,2$.

3. Обозначим $k(\alpha) = e^{-\alpha}/(1-\alpha)$.

Основным результатом работы является теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть

$$k(\alpha)(M_1 + \|g\|)(\lambda_{N+1} - \lambda)^{-(1-\alpha)} \le \rho/2,$$
$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > (1 + 2\sqrt{2})M_2,\ \lambda_{N+1} - \lambda > \sqrt{2}M_2. \tag{9}$$

Тогда существует функция $F(p): PH \to QV$, обладающая следующими свойствами:

1) $\|F(p)\| \le (M_1 + \|g\|)(\lambda_{N+1} - \lambda)^{-1}$, $\|F(p)\|_V \le \rho/2$ для всех $p \in PH$.

2) $\|F(p_1) - F(p_2)\| < \sqrt{2}\|p_1 - p_2\|$ для всех $p_i \in PH$, $i = 1,2$.

3) Свойство инвариантности

$$S_t^\theta(p,F(p)) = PS_t^\theta(p,F(p)) + F(PS_t^\theta(p,F(p)))$$

справедливо для всех $p \in PH$ и $t \in \mathbf{R}$, где S_t^θ полугруппа, определяемая (6).

4) Свойство притяжения

$$\|QS_t^\theta(v) - F(PS_t^\theta(v))\| \le e^{-\gamma t}\|Qv - F(Pv)\|$$

справедливо для всех $v \in H$. Здесь $\gamma = \lambda_{N+1} - \lambda - \sqrt{2}M_2$.

5) Свойство асимптотической полноты: для любых $(p(t),q(t)) = u(t) = S_t^\theta$ и существует такое $\tilde{u}(t) = S_t^\theta \tilde{u}$, что $Q\tilde{u}(t) = F(P\tilde{u}(t))$ и

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \le C_1 e^{-\gamma t}\|Qu(0) - F(Pu(0))\|$$

для всех $t \ge 0$ и некотором $C_1 > 0$.

4. Доказательство существования функции F из теоремы 1 опирается на следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Если выполнены условия (9), тогда для каждого $\eta \in PH$ существует единственное решение $(p(t,\eta),p(t,\eta))$системы (6) определенное на $(-\infty,0]$, удовлетворяющее условиям:

$$p(0,\eta) = \eta, \ \|q(t,\eta)\|_V \le \rho/2, \ \|q(t,\eta)\| \le (M_1 + \|g\|)(\lambda_{N+1} - \lambda)^{-1},$$

$$\|q(t,\eta_1) - q(t,\eta_2)\| \le 2\sqrt{2}^{-\mu t}\|\eta_1 - \eta_2\|,$$

$$\|p(t,\eta_1) - p(t,\eta_2)\| \le C_2 e^{-\mu t}\|\eta_1 - \eta_2\|$$

для всех $t \le 0$, где $\mu = (\lambda_{N+1} + \lambda_N - 2\lambda + M_2)/2$, $C_2 > 0$.

Доказательство. Ради сокращения записи обозначим $\lambda_{N+1} - \lambda = \hat{\lambda}_{N+1}$. Пусть $\hat{q}(\cdot) \in C(-\infty,0;QV) \cap C(-\infty,0;QH)$ с $\|\hat{q}(t)\|_V \le \rho/2$, $\|\hat{q}(t)\| \le (M_1 + \|g\|)\hat{\lambda}_{N+1}^{-1}$ для всех $t \le 0$. Пусть $\hat{p}(t) = \hat{p}(t,\eta,\hat{q})$ является решением задачи

$$p_t + Ap + PB_\theta(p,\hat{q}(t)) + Pg = 0, \ -\infty < t < 0, \quad p(0) = \eta. \qquad (10)$$

Из (7) и леммы Гронуолла следует неравенство

$$\|p(t,\eta_1,\hat{q}_1) - p(t,\eta_2,\hat{q}_2)\| \le e^{-(\lambda_N + M_2)t}\|\eta_1 - \eta_2\| + \\ + M_2\int_t^0 e^{-(\hat{\lambda}_N + M_2)(t-s)}\|\hat{q}_1 - \hat{q}_2\|ds. \qquad (11)$$

Из [5], [6] следует, что уравнение

$$q_t + Aq - \lambda q + QB_\theta(\hat{p}(t),q) + Qg = 0, \ \ q|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (12)$$

имеет единственное решение $q(t) = q(t,\eta,\hat{q})$, ограниченное на $(-\infty,0]$. Из равенства

$$q(t) = -\int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)}(QB_\theta(\hat{p}(s),q(s)) + Qg)\,ds,$$

учитывая (7) и следуя [3], получим неравенства

$$\|q(t)\| \le (M_1 + \|g\|)\hat{\lambda}_{N+1}^{-1}, \ \|q(t)\|_V \le \rho/2. \qquad (13)$$

Очевидно, что функция $q(t)$ как функция определенная на $(-\infty,0]$ со значениями в QV непрерывна. Дифференцируя равенство (12) по t и используя (10), можно убедиться в справедливости неравенства

$$\|q_t\| \le C_3. \qquad (14)$$

Из (12) и неравенств (13), (14), следует оценка

$$\|Aq(t)\| \le C_4. \qquad (15)$$

В неравенствах (14), (15) C_3, C_4 – постоянные, не зависящие от выбора $\hat{q}$. Из неравенств (13), (14), (15), непрерывности $q(t)$ в QV, непрерывности вложения $QH^2 \subset QV \subset QH$ и компактности вложения $QH^2 \subset QV$ следует [5], [6] что множество $\{q(\cdot,\eta,\hat{q}) : \hat{q} \in C(-\tau,0;QV) \cap$

$\bigcap C(-\tau,0;QH), \|\hat{q}(\cdot)\|_V \le \rho/2\}$ компактно вложено в $L_\infty(-\tau,0,QV)$, где τ – любое фиксированное положительное число.

В пространстве $L_\infty(-\infty,0,QV)\bigcap C(-\infty,0,QH)$ определим расстояние $d(q_1,q_2)$ равенством

$$d(q_1,q_2)=\sup_{-\infty<t<0} e^{\mu t}\|q_1(t)-q_2(t)\|.$$

Обозначим $p_i(\cdot,\eta_i,\hat{q}_i)=p_i(\cdot)$, $q_i(\cdot,\eta_i,\hat{q}_i)=q_i(\cdot)$, $i=1,2$, $\eta_1-\eta_2=\eta$, $q_1-q_2=q$, $\hat{q}_1-\hat{q}_2=\hat{q}$. Умножив равенство относительно q на $e^{2\mu t}q$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}e^{2\mu t}\|q\|^2-(\mu+\lambda)e^{2\mu t}\|q\|^2+\left\langle Aq,e^{2\mu t}q\right\rangle+$$
$$+\left\langle Qe^{\mu t}\left(B_\theta(p_1,q_1)\right)-B_\theta(p_2,q_2),e^{\mu t}q\right\rangle=0.$$

Отсюда и из неравенств (7), (8), (11) следует

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(e^{2\mu t}\|q(t)\|^2\right)+\left(\hat{\lambda}_{N+1}-\mu\right)e^{2\mu t}\|q(t)\|^2\le M_2\left(e^{\left(\mu-\left(\hat{\lambda}_N+M_2\right)\right)t}\|\eta\|+\right.$$
$$\left.+M_2\int_t^0 e^{\left(\mu-\left(\hat{\lambda}_N+M_2\right)\right)(t-s)}e^{\mu s}\|\hat{q}(s)\|\,ds\right)\left\|e^{\mu t}q(t)\right\|.$$

Следовательно,

$$d(q_1,q_2)\le\frac{M_2}{\hat{\lambda}_{N+1}-\mu}\left(\|\eta\|+d(\hat{q}_1,\hat{q}_2)\frac{M_2}{\mu-\hat{\lambda}_N+M_2}\right). \tag{16}$$

Обозначим $G(\hat{q})(t)=q(t,\eta,\hat{q})$. В соответствии с (9) и (16), оператор G удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $1/2$. Следовательно, уравнение $G(q)=q$ имеет единственное решение $q\in C(-\infty,0;QH)$. Это решение удовлетворяет неравенству $\|q(t)\|\le\left(M_1+\|g\|\right)\hat{\lambda}_{N+1}^{-1}$. Очевидно, $q\in L_\infty(-\infty,0;QV)$, $\|q\|_V\le\rho/2$. Обозначим $p(t)=\hat{p}(t,\eta,q)$. Решение $(\tilde{p}(t),\tilde{q}(t))$ системы (6) с $\tilde{p}(\tau)=p(\tau)$, $\tilde{q}(\tau)=q(\tau)$ для $\tau\in(-\infty,0)$ определено для всех $t\in[\tau,\infty)$ и $(\tilde{p}(t),\tilde{q}(t))=(p(t),q(t))$ для всех $t\in[\tau,0)$. Таким образом, $p(t)=p(t,\eta)$, $q(t)=q(t,\eta)$ является единственным решением системы (6) удовлетворяющим теореме 2.

5. Перейдем к доказательству теоремы 1. Положим $q(0,p)=F(p)$. Свойства 1), 2) функции $F(p)$ в теореме 1 следуют из теоремы 2 и определения F. Очевидно, справедливо равенство

$$p(t-\tau,\eta)=p(t,p(-\tau,\eta)),\ q(t-\tau,\eta)=q(t,p(-\tau,\eta)), \tag{17}$$

где $\tau > 0$, $t < \tau$. Следовательно, решения $p(t,\eta), q(t,\eta)$ определены на вещественной оси, и равенства (17) имеют место для всех $t,\tau \in \mathbf{R}$. Из (17) и определения F следует $q(0,p(t,\eta)) = F(p(t,\eta)) = q(t,\eta)$. Таким образом, $q = F(p)$ определяет инвариантное многообразие системы (6). Докажем свойство 4). Пусть $(p(t),q(t))$ – решение системы (6). Обозначим $z(t) = q(t) - F(p(t))$. Очевидно,

$$z_t + Az + Z(p,z) = 0$$

где

$$Z(p,z) = F'(p)\left[PB_\theta(p,F(p)+z) - PB_\theta(p,F(p))\right] +$$
$$+ QB_\theta(p,F(p)+z) - QB_\theta(p,F(p)).$$

Заметим, что согласно теореме 2 функция $F'(p)$ определена почти всюду и удовлетворяет неравенству $\|F'(p)\|_{C(PH,QH)} \le 2\sqrt{2}$. Из неравенств (8), (9) следует

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2 + \left(\lambda_{N+1} - 2\sqrt{2}M_2\right)\|z\|^2 \le 0,$$

Следовательно, $\|z(t)\| \le e^{-\gamma t}\|z(0)\|$.

Следуя [3, глава 9], можно убедиться в справедливости свойства 5).

Согласно теореме 2 функция $F(p)$ как функция со значениями в пространстве QH является липшицевой. Из доказательства теоремы 3 и определения $F(p)$ следует, что функция $F(p)$ в пространстве QV является непрерывной. Чтобы обеспечить липшицевость F в пространстве QV потребовалось бы заменить условие $\lambda_{N+1} - \lambda_N \ge \left(1 + 2\sqrt{2}\right)M_2$ на более ограничительное.

Случаи $n = 1,2$ исследуются аналогичным образом. Если $n = 1$, в качестве пространства V можно принять пространство $H_0^1(\Omega)$. При $n = 2$ положим $V = H^{2\alpha}(\Omega)$, где $\alpha \in (1/2,1)$.

6. Рассмотрим уравнение (1) при периодических условиях

$$u(x_1,\ldots,x_i + 2\pi,\ldots,x_n) = u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n), \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

или, что эквивалентно $\Omega = T^n$, где T^n – n-мерный тор.

Ограничимся случаем $n = 2$ и рассмотрим уравнение реакции-диффузии вида

$$\partial_t u = \nu\Delta u + \lambda u - f(x,u) - g(x), \qquad (18)$$

где $\nu > 0$, Δ – оператор Лапласа, $g \in L_2\left(T^2\right) = H$.

Предположим, что $\lambda \geq 0$, функция $f(x,u) \in C^1\left(T^2 \times \mathbf{R},\mathbf{R}\right)$ и удовлетворяет условиям

$$f(x,u)\,u \geq \mu_0 |u|^{p_0},$$
$$\partial f(x,u)/\partial u \geq 0, \quad |\partial f(x,u)/\partial u| \leq C\left(1+|u|^{p_0-2}\right),$$

где $p_0 > 2$.

Пусть $\{S_t\}$ – полугруппа, определяемая уравнением (18). Рассуждения, аналогичные приведенным в [1], доказывают, что полугруппа $\{S_t\}$ имеет H-поглощающее множество, ограниченное в H^2. Зафиксируем $\alpha \in (1/2,1)$. Полугруппа $\{S_t\}$ имеет H-поглощающее множество G, ограниченное в $H^{2\alpha}$. Модифицируем уравнение (18) в окрестности множества G. Для модифицированного уравнения справедлив аналог теоремы 2.

Спектральное условие

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N \geq c, \tag{19}$$

где $\{\lambda_i\}$ – упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений оператора $-\nu\Delta - \lambda$ на $H\left(T^2\right)$, c – постоянная не зависящая от N, гарантирует существование N-мерного ИМ полугруппы $\{S_t\}$. Так как множество собственных значений оператора $-\nu\Delta - \lambda$ на $H\left(T^2\right)$ имеет вид

$$\nu\left(m^2 + k^2\right) - \lambda,$$

где $(m,k) \in \mathbf{Z}^2$, то согласно [14] неравенство (19) выполняется для любого $\nu > 0$ при соответствующем выборе N. Таким образом справедлива теорема

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (18) удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда для каждого $\nu > 0$ уравнение (18) имеет инерциальное многообразие.

Список использованной литературы

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 294 с. 2. *Coppel W. A., Palmer R. J.* Averaging and Integral Manifolds // Bull. Austral Math. Soc. – 1970. – 2, – P. 197-222. 3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 374 с. 4. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Теорема о центральном многообразии нелинейного параболического

уравнения. // Укр. мат. ж., – 1995. – 48, 8, – С. 1021-1036. 5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Наука, 1972. – 587 с. 6. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 206 с. 7. *Foias C., Sell G. R. and Temam R.* Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations. // J. Diff. Eq. – 1988. – 73, – P. 309-353. 8. *Mallet-Paret J. and Sell G. R.* Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equation // J. AMS – 1988. – 1, – P. 805-866. 9. *Jolly M. S.* Explicit Construction of an Inertial Manifolds for a Reaction Diffusion Equation. // J. Diff. Eq. – 1989. – 78, – P. 220-261. 10. *Constantin P., Foias C., Nicolaenko B. and Temam R.* Spectral Barriers and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations. // J. Dynamics Diff. Eq. – 1989. – 1, 1. – P. 45-73. 11. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию инерциальных многообразий. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1992. – 97 с. 12. *Чуешов И. Д.* Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // Успехи мат. наук – 1993. – 48, 3. – С. 135-161. 13. *Романов А. В.* Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Известия РАН сер. мат. – 1993. – 57, 4. – С. 36-54. 14. *Richards I.* On the gaps between numbers which are the sum of the squares // Adv. Math. – 1982 – 46, – P. 1-2.

Поступила в редколлегию 18. 03.98