УДК 62-50

С. А. ДУБОВИК, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗА КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАССЫ

Рассматривается стохастическая слабовозмущенная динамическая система с вырожденной матрицей диффузии, для которой предлагается алгоритм оценки вероятности достижения границы заданной области, основанный на функционале действия в понтрягинской форме.

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_t^{\varepsilon} &= b\left(x_t^{\varepsilon}\right) + \varepsilon\,\sigma\left(x_t^{\varepsilon}\right)\dot{w}_t\ , \\ x_0^{\varepsilon} &= x \end{aligned} \tag{1}$$

при стремлении ε к нулю, $\varepsilon > 0$.

В уравнении (1) w_t - 1-мерный винеровский процесс, n-мерный вектор $b^T(x) = \left(b^1(x),\ldots,b^n(x)\right)$, $n \times 1$ - матрица $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности с вероятностью 1 непрерывного решения (1). Предположим, что невозмущенная система, соответствующая (1):

$$\dot{x}_t = b(x_t)\,,\; x_0 = x\,, \tag{2}$$

имеет устойчивое состояние равновесия x_* с областью притяжения $D \subset R^n$, причем $x_0 = x \in D$. В [1] для оценки вероятности и среднего времени выхода траектории системы (1) на границу области D вводится нормированный функционал действия $S_{T_1T_2}(\varphi)$, который для абсолютно непрерывных функций $\varphi \in C_{T_1T_2}\left(R^n\right)$ и в случае равномерно невырожденной матрицы диффузии σ определяется так

$$S_{T_1T_2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi_t)\left(\dot{\varphi}_t^i - b^i(\varphi_t)\right)\left(\dot{\varphi}_t^j - b^j(\varphi_t)\right)dt\,, \tag{3}$$

где

$$a_{ij}(x) = \left(a^{ij}(x)\right)^{-1},\; a^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^i(x)\sigma_k^j(x).$$

обозначим через A_D множество непрерывных функций φ_t, $0 \le t \le T$, таких, что $\varphi_t \in D$ при всех $t \in [0,T]$ и $\overline{A}_D = C_{OT} / A_D$. В [1] доказывается, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P \left\{ x_t^\varepsilon \in \partial D \right\} \text{при каком-то } t \in [0,T] = -\min_{\varphi \in \overline{A}_D} S_{OT}(\varphi). \tag{4}$$

Этот и другие подобные результаты в [1] позволяют вычислять с помощью функционала действия грубые (с точностью до логарифмической эквивалентности) оценки вероятности граничных, критических состояний в предположении равномерной невырожденности матрицы диффузии:

$$\sum_{ij} a^{ij}(x) C_i C_j \ge \mu \sum_i c_i^2 \quad , \quad \mu > 0.$$

В прикладных задачах теории управления это условие как правило не выполняется. В настоящей работе мы будем считать, что случайный шум входит только в последние $l = n - m$ уравнений системы, $1 \le m \le n$, то есть

$$\sigma(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

является вырожденной $n \times n$ - матрицей, в которой $l \times l$ - матрица $\hat{\sigma}(x)$ равномерно невырождена. Наряду с параметром ε, введем в (1) малый параметр λ, заменяя матрицу (5) следующей

$$\sigma(x) = \sigma_\lambda(x) = \begin{vmatrix} \lambda I_m & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}(x) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где I_m - единичная $m \times m$ - матрица. Ясно, что такая замена регуляризирует задачу, так как при фиксированном λ матрица диффузии $\sigma_\lambda(x)$ удовлетворяет условию равномерной невырожденности. В силу этого, для системы (1), (6) может быть сформирован нормированный функционал действия (3) с последующей оценкой вероятности критического состояния с помощью вариационной задачи (4). Обозначим

$$\widetilde{S}(\lambda) = \min_{\varphi \in \overline{A}_D} S_{OT}(\varphi) = S_{OT}(\widetilde{\varphi}),$$

то есть $\widetilde{\varphi}$ - экстремаль, доставляющая минимум (4). Если теперь существует

$$\lim_{\lambda \to O+} \widetilde{S}(\lambda) = \widetilde{S}(0), \tag{7}$$

то вероятность критического состояния в соответствии с (4) оценивается величиной $\exp\left\{-\varepsilon^{-2}\widetilde{S}(0)\right\}$. Остается доказать (7) и вычислить $\widetilde{S}(0)$. Для этого удобно преобразовать вариационную задачу (3), (4), (6) к понтрягинской форме [2]. Функционал (3) в векторно-матричной форме имеет вид

$$S_{T_1T_2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} [\,\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)\,]^T \left[\sigma_\lambda(\varphi_t)\sigma_\lambda^T(\varphi_t)\right]^{-1} [\,\dot{\varphi}_t - b(\varphi_t)\,]\, dt, \tag{8}$$

где T - символ транспонирования.

Наряду с исходной стохастической системой (1) рассмотрим детерминированную управляемую систему

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_t = b(\varphi_t) + \sigma_\lambda(\varphi_t)u_t\ , \\ &\varphi_0 = x, \end{aligned} \tag{9}$$

где u_t - 1-вектор измеримых функций "управления".

С учетом (9) критерий (8) имеет особенно простой вид

$$S_{T_1T_2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} U_t^T U_t\, dt \tag{10}$$

Теперь задача (3), (4), (6) эквивалентна следующей: минимизировать (10) при $T_1 = 0$, ограничении (9) и условии

$$\varphi_{T_2} \in \partial D, \tag{11}$$

означающем выход фазовой точки (9) в момент T_2 на границу области *D*. Гамильтониан для задачи (9) - (11)

$$\chi = -\frac{1}{2}u_t^T u_t + \phi_t^T\,[\,b(\varphi_t) + \sigma_\lambda(\varphi_t)u_t\,].$$

Условие максимума χ по u_t дает оптимальное "управление"

$$\tilde{u}_t = \sigma_\lambda^T(\varphi_t)\phi_t, \tag{12}$$

где n-вектор сопряженных переменных удовлетворяет уравнению

$$\dot{\phi}_\lambda^T = -\frac{\partial\chi}{\partial\varphi_t} = -\phi_t^T\left[\frac{\partial b(\varphi_t)}{\partial\varphi_t} + \frac{\partial\sigma_\lambda(\varphi_t)}{\partial\varphi_t}\sigma_\lambda^T(\varphi_t)\phi_t\right]. \tag{13}$$

В соответствии с (6) производная $\partial\sigma_\lambda(\varphi_t)/\partial\varphi_t$ не зависит от λ.

Уравнения (12), (13) представляют собой регулярно возмущенную систему уравнений по параметру $\lambda > 0$, в которой возможен предельный переход по $\lambda \to O+$. Вычисление предела (70 сводится к подстановке в (12), (13) $\sigma_\lambda(\varphi_t) = \sigma_0(\varphi_t) = \sigma(\varphi_t)$ в форме (5).

В [3], [4] алгоритм (12), (13) при $\lambda \to O+$ использовался для оценки вероятности опрокидывания судна на волнении.

В заключении отметим следующее. В данной статье принят для формирования оценки вероятности последовательный предельный переход сначала по ε, а затем по λ. Можно показать, что на самом деле существует двойной предел по $\varepsilon \to O+$, $\lambda \to O+$. Ясно, что предлагаемый алгоритм вычисления оценки при этом остается неизменным.

Список использованной литературы

1. *Вентцель А. Д.* Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. - М: Наука, 1986. - 176 с. 2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. - М: Наука, 1972ю - 429 с. 3. *Нечаев Ю. И., Дубовик С. А.* Анализ устойчивости нелинейной стохастической модели динамики корабля на волнении с помощью функционала действия // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. - с. 101-103. 4. *Nechaev Y., Dubovic S.* The Estimate Probability of Ships Capsizing on a Seaway // Proc. Int. Symposium "Ship Safety in a Seaway: Stability, Maneuverability, Nonlinear Approach": Kaliningrad, 1995.

Поступила в редколлегию 11.05.96