УДК 517.977:629.734.7

Т. З. ГИМАДИЕВА, науч. сотр., НИИ аэроуп. сист., г. Феодосия

К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЛАНИРУЮЩЕЙ ПАРАШЮТНОЙ СИСТЕМОЙ

Для получения программы оптимального управления планирующей парашютной системой, движение которой в горизонтальной плоскости описывается известными нелинейными дифференциальными уравнениями, используются необходимые условия экстремума. Краевая задача решается методом И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько.

1. Постановка задачи оптимального управления. Рассматривается движение управляемой парашютной системы в горизонтальной плоскости. Используются следующие основные допущения: 1) скорость ветра $\vec{W}$ и скорость снижения V_y постоянны, 2) считается, что управление производится креном, т.е. углом разворота, при этом величина модуля вектора скорости относительно воздуха остается постоянной, 3) управление считается безынерционным.

С учетом этих допущений движение описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\omega + W\,, \quad \frac{dz}{dt} = -V\sin\omega\,, \quad \frac{d\omega}{dt} = u\,, \tag{1}$$

где x, z - координаты системы в горизонтальной плоскости (Рис. 1),

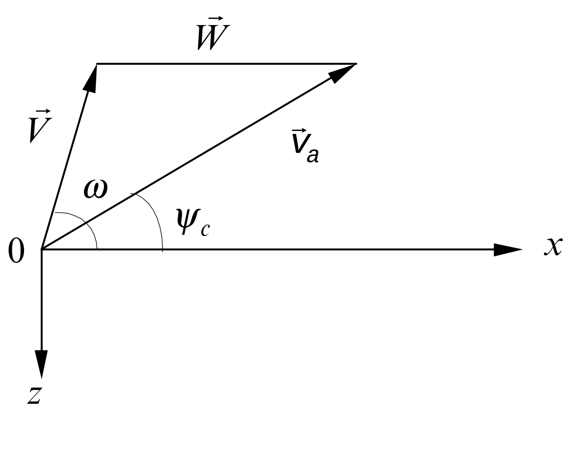


Рис. 1

оси располагаются таким образом, чтобы ось $0x$ была коллинеарна вектору $\vec{W}$, V - модуль вектора относительной скорости системы в горизонтальной плоскости, ω - угол между осью $0x$ и вектором скорости $\vec{V}$, u - управление.

На рис. 1 используются также следующие обозначения: $\vec{v}_a$ - вектор абсолютной скорости системы в горизонтальной плоскости, ψ_c - угол поворота траектории (при $W = 0$, $\vec{V} = \vec{v}_a$, $\omega - \psi_c$). Модуль вектора абсолютной скорости системы

$$v_a = \sqrt{(V\cos\omega + W)^2 + (V\sin\omega)^2}\ .$$

Угол поворота траектории

$$\psi_c = \operatorname{arctg}\frac{V\sin\omega}{V\cos\omega + W}.$$

Начальные условия движения:

$$x(t_0) = x_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \omega(t_0) = \omega_0. \qquad (2)$$

Движение рассматривается во временном интервале $0 \le t \le T \equiv h_0/V_y$, где h_0 - начальная высота.

На управление накладывается ограничение

$$u \in [u_{\min}, u_{\max}], \qquad (3)$$

где $u_{\min}, u_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значение управления.

Выбор критерия оптимальности зависит от требований, пред ъявляемых к парашютной системе. Здесь минимизируемый функционал записывается в виде

$$P(x,u) = q_0\left[x^2(T) + z^2(T)\right] + q_1\cos\omega(T) + \frac{q_2}{(T - t_0)}\int_{t_0}^{T} u^2(t)dt, \qquad (4)$$

где q_0, q_1, q_2 - неотрицательные весовые параметры.

Первый член отражает стремление минимизировать расстояние до цели в конечный момент (начало системы координат $0xz$ располагается в точке, в которую требуется посадить систему), второй - мин имизировать кинетическую энергию системы в момент посадки за счет захода на посадку против ветра, третий - минимизировать величину управления в процессе движения.

Покажем, что, минимизируя второй член функционала (4), м инимизируем кинетическую энергию. Кинетическая энергия пропо рциональна квадрату абсолютной скорости:

$$v_a^2 = (V\cos\omega + W)^2 + (V\sin\omega)^2 = V^2 + 2VW\cos\omega + W^2.$$

Поскольку $V = const$, $W = const$, чтобы минимизировать $v_a^2(T)$ при $W > 0$, надо минимизировать $\cos\omega(T)$, причем значение параметра q_1 должно задаваться с учетом величины W.

Поскольку левый конец фазовой траектории фиксирован, вместо функционала (4) можно рассматривать интегральный функционал [1]:

$$P_1(x,u) = x_0(T) = \int_{t_0}^{T}\Big[2q_0\big(x(V\cos\omega + W) - zV\sin\omega\big) -$$

$$- q_1 u\sin\omega + \frac{q_2}{(T - t_0)}u^2\Big]dt \qquad (5)$$

2. Необходимые условия оптимизации управления. Для решения задачи, которая является задачей с фиксированным временем и св ободным правым концом, воспользуемся необходимыми условиями минимума [1].

Составим систему сопряженных уравнений:

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0,\ \frac{d\psi_1}{dt}=-2q_0(V\cos\omega+W)\psi_0,\ \frac{d\psi_2}{dt}=2q_0V\sin\omega\psi_0,$$

$$\begin{gathered}\frac{d\psi_3}{dt}=(V\sin\omega)\psi_1+(V\cos\omega)\psi_2+\\+(2q_0xV\sin\omega+2q_0zV\cos\omega+q_1u\cos\omega)\psi_0\end{gathered}\qquad(6)$$

Условия трансверсальности для данного случая записываются в виде [1]:

$$\psi_0(T)=-1,\quad \psi_1(T)=0,\quad \psi_2(T)=0,\quad \psi_3(T)=0.\qquad(7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\psi_0(t)\equiv-1\quad \forall t\in[t_0,T].\qquad(8)$$

Тогда (6) преобразуется к виду:

$$\frac{d\psi_1}{dt}=2q_0(V\cos\omega+W),\quad \frac{d\psi_2}{dt}=-2q_0V\sin\omega,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt}=V\sin\omega(\psi_1-2q_0x)+V\cos\omega(\psi_2-2q_0z)-q_1u\cos\omega\qquad(9)$$

Функция Гамильтона

$$\begin{gathered}H=x_0(T)=-2q_0[x(V\cos\omega+W)-zV\sin\omega]+q_1u\sin\omega-\\-\frac{q_2}{(T-t_0)}u^2+\psi_1(V\cos\omega+W)-\psi_2V\sin\omega+\psi_3u.\end{gathered}\qquad(10)$$

Для того, чтобы управление $\tilde{u}(t)$ и траектория $\tilde{x}(t)=(\tilde{x},\tilde{z},\tilde{\omega})$ доставляли минимум функционалу (4) при уравнениях связи (1), ограничениях на управление (3) и краевых условиях (2), необходимо, чтобы существовала такая непрерывная функция $\psi=(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3)$, удовлетворяющая системе (6) и условиям (7), что $\forall\, t\in[t_0,T]$ функция Гамильтона $H(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t),\psi(t),t)$ достигала в точке $\tilde{u}(t)$ максимума по всем $u\in[u_{\min},u_{\max}]$ [1].

Таким образом, задача сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1), (9) при краевых условиях (2), (7), при этом управление u в каждый момент времени определяется из условия максимума функции Гамильтона (10).

Найдем максимум гамильтониана (10) на интервале $[u_{\min},u_{\max}]$.

Для этого найдем первую производную

$$H'_u = q_1 \sin\omega - \frac{2q_2}{(T - t_0)} u + \psi_3. \qquad (11)$$

Первая производная гамильтониана равна нулю в точке

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{q_1 \sin\omega + \psi_3}{q_2} (T - t_0), \text{ (при } q_2 \neq 0\text{)}. \qquad (12)$$

Эта точка является точкой максимума, поскольку

$$H''_u = -\frac{2q_2}{T - t_0} < 0. \qquad (13)$$

Если $u_m \notin [u_{\min}, u_{\max}]$, а также при $q_2 = 0$, максимум гамильтониана достигается на одном из концов отрезка $[u_{\min}, u_{\max}]$.

3. Решение краевой задачи методом И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько. Для класса задач, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, со свободным концом в общем случае нет конечной процедуры получения точного решения, тем не менее для них разработаны эффективные приближенные способы [1].

Для решения краевой задачи применяется метод И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько [1]: 1. Задается "диспетчерское" решение $u_*(t)$. 2. Интегрируется система (1), находятся $x_*(t)$, $z_*(t)$ и $\omega_*(t)$. 3. Интегрируется система (9) справа налево, при этом считается, что $x = x_*$, $z = z_*$, $\omega = \omega_*$, $u = u_*$. Одновременно из условия максимума функции Гамильтона определяется новое управление u_1.

Теперь, используя управление u_1, повторяются операции пунктов 1, 2, 3 и т.д. В общем случае этот метод расходится. Пусть

$$P_1(u_1) \geq P_1(u_*), \qquad (14)$$

тогда вместо u_1 используется

$$\widetilde{u}_1 = u_* + \frac{u_1 - u_*}{k_u}, \qquad (15)$$

где k_u выбирается из условия

$$P_1(\widetilde{u}_1) \geq P_1(u_*). \qquad (16)$$

Здесь этот метод используется в несколько видоизмененном виде: вместо управления u_1 используется управление

$$\widetilde{u}_1 = \begin{cases} u_*, & \text{при} \in [0, \widetilde{t}], \\ u_* + \dfrac{u_1 - u_*}{k_u}, & \text{при } t \in [\widetilde{t}, T], \end{cases} \qquad 0 \leq \widetilde{t} \leq T, \qquad (17)$$

где k_u и $\widetilde{t}$ выбираются из условия (16). Это позволяет ускорить сходимость решения.

4. Задание весовых параметров в критерии оптимальности. К большинству планирующих парашютных систем предъявляются довольно жесткие требования на район приземления. С целью уменьшения перегрузок в момент приземления парашютную систему обычно стараются посадить против ветра. Два этих требования заложены в первых двух членах критерия оптимальности (4).

Введем обозначения: r - промах, $r = \sqrt{x^2(T) + z^2(T)}$, $r_{\max}$ - максимальный допустимый промах. Для определения допустимого угла захода парашютной системы на посадку $\omega(T)$ потребуем, чтобы кинетическая энергия в момент приземления при наличии ветра не превышала кинетическую энергию при безветренной погоде:

$$V^2 + 2VW\cos\omega + W^2 \le V^2, \tag{18}$$

отсюда

$$\cos\omega(T) \le -\frac{W}{2V} \qquad (\text{при } W > 0). \tag{19}$$

Потребуем, чтобы в границах допустимой области приземления диапазоны изменения значений первых двух членов в критерии оптимальности (4) были равны, т.е.

$$q_0 r_{\max}^2 = q_1 \cos\omega(T)\big|_{\max} - q_1 \cos\omega(T)\big|_{\min}. \tag{20}$$

В соответствии с неравенством (19)

$$\cos\omega(T)\big|_{\max} = -\frac{W}{2V}, \qquad \cos\omega(T)\big|_{\min} = -1. \tag{21}$$

Отсюда

$$q_1 = \frac{q_0 r_{\max}^2}{1 - \dfrac{W}{2V}}. \tag{22}$$

Например, при $r_{\max} = 5\,м$, $W = 6\,м/с$, $V = 9\,м/с$, задавая $q_0 = 1$, получим $q_1 = 37{,}5$.

На многие системы требования по минимизации усилия управления в процессе движения не накладываются, в этом случае $q_2 = 0$.

Тем не менее, в этом случае полезно иметь ресурс управления, который может использоваться для корректировки движения, поскольку рассчитанная программа $u(t)$ никогда точно не выполняется в связи с влиянием случайностей и неопределенностей.

В случае, когда на систему не накладываются требования по минимизации усилия управления, ориентировочно порядок параметра q_2 оценим следующим образом. Пусть на границе допустимой области по углу захода на посадку в момент времени $t = T$ (при этом $|\sin\omega| = \sqrt{1 - W^2/4V^2}$), $|u_m| = u_{\max}$ $(u_{\max} = -u_{\min})$, т.е. из (12) следует

$$\left|\frac{1}{2}\frac{q_1 \sin\omega}{q_2}\left(T - t_0\right)\right| = u_{\max}. \tag{23}$$

Отсюда

$$q_2 = \frac{1}{2}\frac{q_1}{u_{\max}}\sqrt{1 - \frac{W^2}{4V^2}}\left(T - t_0\right). \tag{24}$$

Как показали расчеты, при значениях q_2, близких к тем, которые определяет формула (24), третий член критерия оптимальности (4) начинает учитываться, когда управление приближается к допустимой области по первым двум критериям. Таким образом, формула (24) позволяет примерно оценивать порядок величины q_2, если физические возможности системы управления не накладывают на нее более конкретные ограничения.

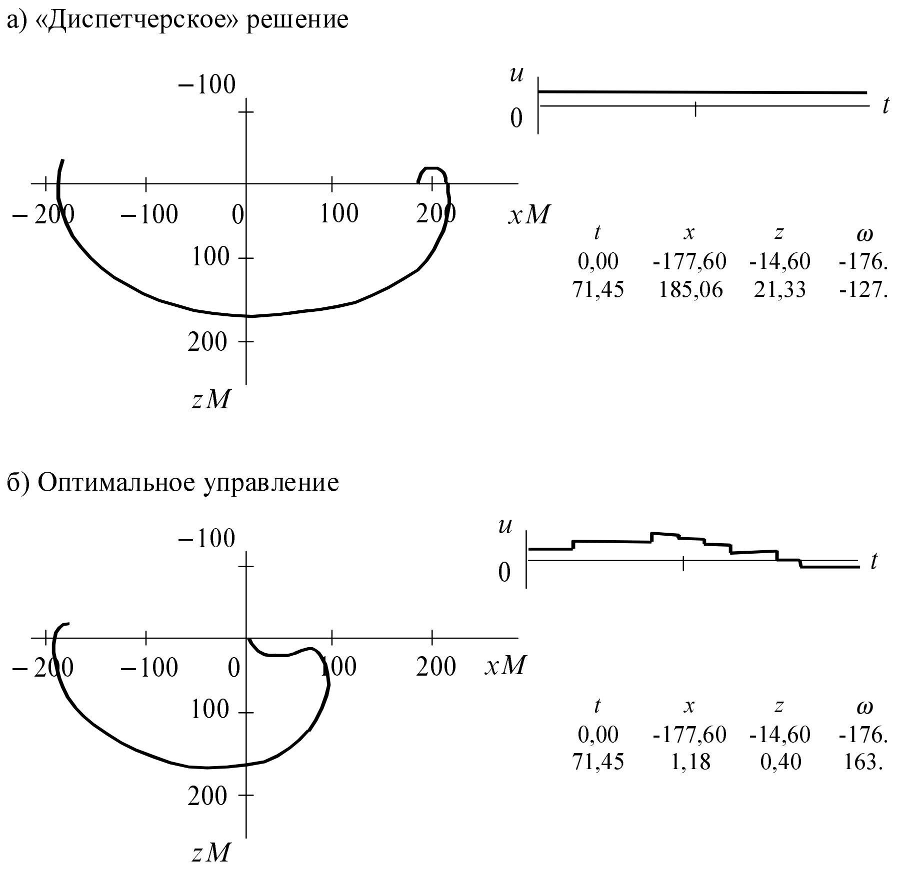
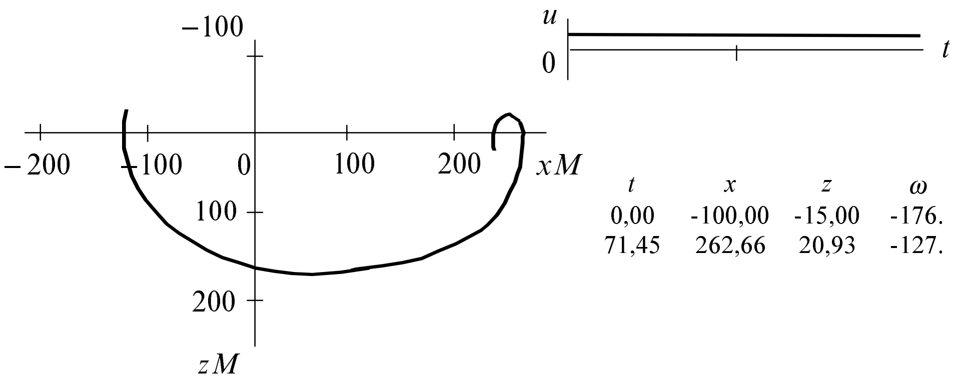


Рис. 2

5. Примеры расчетов оптимального управления. Результаты расчетов показали работоспособность метода для данной задачи, в рассматриваемом случае метод не предъявляет больших требований к начальному приближению.

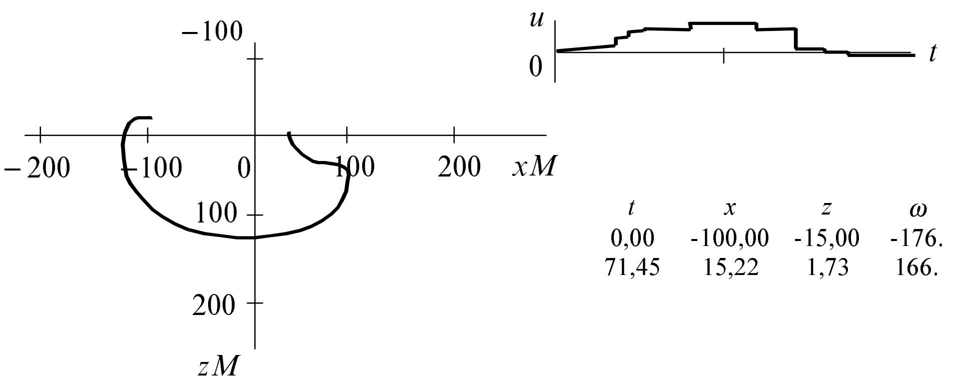
В качестве примеров на рис. 2, 3, 4 приводятся результаты расчетов, показаны проекция траектории на горизонтальную плоскость и изменение управления $u(t)$ в процессе движения.

а) «Диспетчерское» решение



t	x	z	ω
0,00	-100,00	-15,00	-176.
71,45	262,66	20,93	-127.

б) Оптимальное управление



t	x	z	ω
0,00	-100,00	-15,00	-176.
71,45	15,22	1,73	166.

Рис. 3

На рис. 2а, 3а и 4а показаны "диспетчерские" решения, на рис 2б, 3б и 4б - соответствующие им оптимальные решения.

Расчеты проведены при $V = 9\,м/с$, $V_y = 7\,м/с$, $W = 6\,м/с$, $h_0 = 500 м$. Значение $u_{max} = -u_{min} = 0{,}4\,c^{-1}$, использованное в расчетах, соответствует минимальному радиусу разворота $r = V/|u| = 22{,}5$ м. В первых двух примерах (рис. 2, 3) $q_0 = 1$, $q_1 = 70$, $q_2 = 5000$, в третьем примере (рис. 4) $q_0 = 1$, $q_1 = 70$, $q_2 = 0$, значения x и z(м), угла ω(град) в моменты времени t_0 и T приводятся на рисунках.

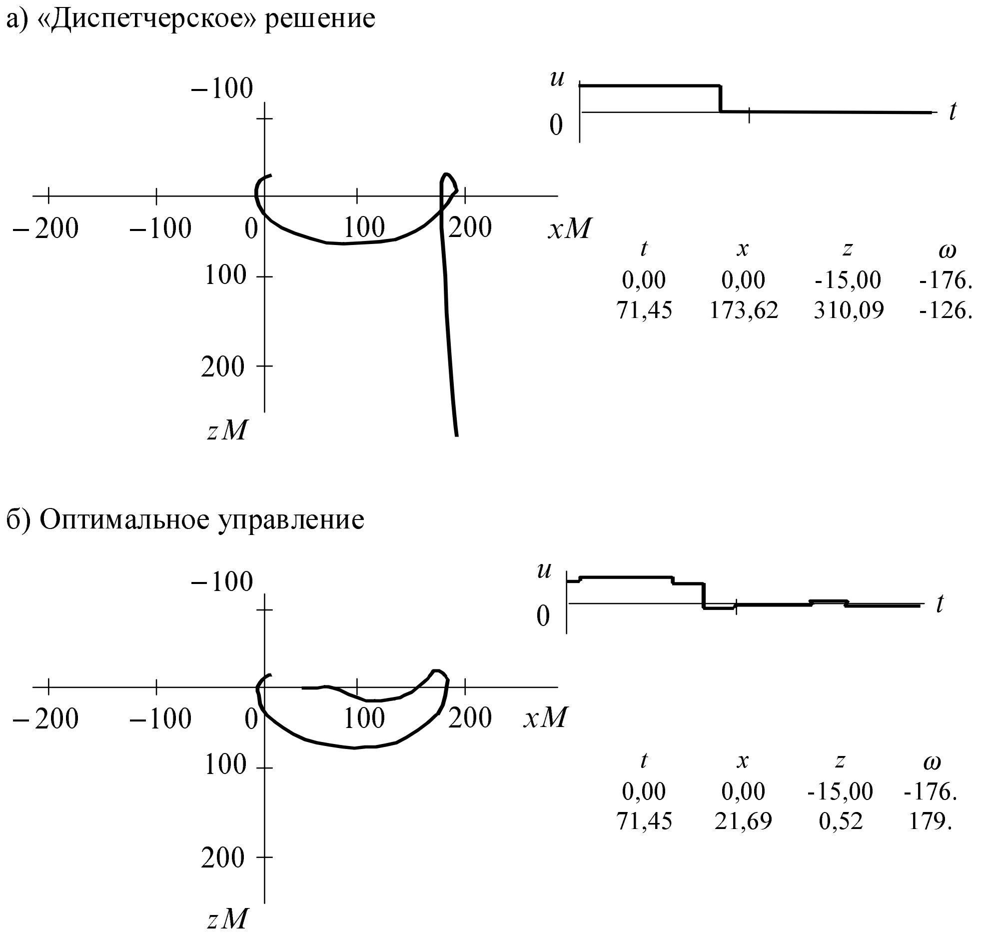


Рис. 4

В приведенных примерах выбраны неудачные начальные приближения, тем не менее метод позволяет достичь неплохого оптимального решения.

Надо заметить, что вид системы уравнений существенно влияет на требования к начальному приближению. Так, если движение описывается системой уравнений в виде:

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\omega + W\ , \quad \frac{dz}{dt} = -V\sin\omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{V}\operatorname{tg}\gamma, \quad \frac{d\gamma}{dt} = u_1,$$

где γ - угол крена, g - ускорение свободного падения, u_1 - управление, - то для получения оптимального решения требуется достаточно хорошее начальное приближение.

Список использованной литературы

1. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 13с.

Поступила в редколлегию 12.05.96