УДК 531.53

Ю. Б. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук, Симфероп. гос. ун-т

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ВЫЗЫВАЕМЫЕ СВОБОДНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ НА ЕГО ГРАНИЦЕ

В работе строится приближенная математическая модель, объясняющая наличие упругих длиннопериодных деформаций земной поверхности, связанных со свободными колебаниями замкнутых ограниченных водоемов (морей). В рамках этой модели (без учета вращения Земли) рассчитаны частоты и соответствующие им формы свободных колебаний Черного и Азовского морей, рассматриваемых как изолированные бассейны малой, переменной глубины. В заданной точке земной поверхности (точка установки регистрирующего прибора) вычислены теоретические амплитуды компонент тензора деформаций и другие упругие характеристики среды.

В ряде работ, например в работах [1-2], сообщается об экспериментальном обнаружении литосферных деформаций, имеющих амплитуды порядка $10^{-9} - 10^{-12}$ и периоды в диапазоне от 1 до 10 часов. Особый интерес к исследованию длиннопериодных колебаний вызван тем, что в ряде случаев, как указывается в работах [1-4], такие колебания усиливаются перед сильными землетрясениями. В этих работах на основании соответствия экспериментальных спектров деформаций и теоретического спектра свободных колебаний Черного моря делается вывод, что регистрируемые длиннопериодные деформации земной поверхности возбуждаются сейшевыми колебаниями Черного моря.

В настоящей работе строится приближенная математическая модель, объясняющая наличие упругих длиннопериодных деформаций земной поверхности. В рамках этой модели (без учета вращения Земли) рассчитаны частоты и соответствующие им формы свободных колебаний Черного и Азовского морей, рассматриваемых как изолированные бассейны малой, переменной глубины. В заданной точке земной поверхности (точка установки регистрирующего прибора) вычислены теоретические амплитуды компонент тензора деформаций и другие упругие характеристики среды.

1. Спектральная задача сейшевых колебаний жидкости в ограниченном водоеме

Численное решение задачи о нахождении собственных периодов и соответствующих им форм колебаний поверхности идеальной несжимаемой жидкости во вращающемся бассейне произвольной геометрии, как известно, связано со значительными вычислительными трудностями. Такая задача решена численно для бассейнов постоянной глубины с простой формой границ. Например, в работах [5-6] представлены решения для квадрата и прямоугольника. Аналитическое решение задачи получено в работах [5, 7] для круглого бассейна постоянной глубины.

Для оценки периодов и соответствующих им форм собственных колебаний Черного и Азовского морей пренебрежем вращением Земли.

Для численного расчета периодов и распределений амплитуд собственных колебаний Черного и Азовского морей методом конечных элементов решаем спектральную задачу в следующей постановке.

Уравнение колебаний возьмем в приближении теории мелкой воды [8] для однородной идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в бассейне переменной глубины $H = H(x,y)$ с криволинейной береговой линией Γ. Ищем решения уравнения вида $U(x,y,t) = U(x,y)\cdot\exp(i\omega t)$. Для заданной на плоскости XY ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ ищутся гладкие внутри области функции $U(x,y) \neq 0$, ($U(x,y)$ – амплитуда отклонения поверхности жидкости от положения равновесия) и вещественные числа λ, удовлетворяющие уравнению колебаний

$$\frac{\partial}{\partial x} H \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} H \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda^2 U = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda^2 = \omega^2/g$, ω – частота колебаний, g – ускорение свободного падения.

Ищем решение задачи при следующих ограничениях. Полагаем коэффициент уравнения $H(x,y) \geq 0$; если точка $(x,y) \notin \Gamma$, то $H(x,y) > 0$; если $(x,y) \in \Gamma$ и $H(x,y) = 0$, то $\left|\frac{\partial H}{\partial n}\right| \geq c > 0$, где n – нормаль к границе Γ, а c – константа, задаваемая из физических условий; на границе Γ решения уравнения удовлетворяют условию $|U| < \infty$.

В такой постановке эта спектральная задача имеет счетное множество собственных функций $H_m(x,y)$, описывающих распределение амплитуд в m-ой моде, и собственных значений λ_m^2, определяющих частоту m-ой моды, которые могут быть упорядочены в бесконечную неограниченную последовательность $0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \ldots$. Периоды собственных колебаний определяются через величины λ_m по формуле $T_m = 2\pi / \left(\sqrt{g}|\lambda_m|\right)$.

Такая постановка краевой задачи отличается от традиционной, когда предполагается наличие вертикальной жесткой стенки на границе бассейна и ставится условие непротекания жидкости через эту стенку.

Вычисления проводились на сетке из 328 треугольных элементов. При аппроксимации формы дна и разбиении области на треугольные элементы учитывались условия на коэффициент $H(x,y)$ уравнения, сформулированные выше. Само уравнение (1) аппроксимировалось методом Галеркина на множестве кусочно-линейных функций, что приводит к обобщенной спектральной задаче для уравнения $Au = \lambda Bu$ с симметричными неотрицательно определенными матрицами A и B. Наименьшие собственные значения и соответствующие им собственные векторы вычислялись блочно-степенным методом обратных итераций.

2. Расчет деформаций упругого полупространства, вызываемых сейшевыми колебаниями ограниченных водоемов

В прямоугольной декартовой системе координат (x,y,z) рассматривается упругое однородное изотропное полупространство $(x,y,z;z \geq 0)$. На граничной плоскости $(x,y;z=0)$ полупространства расположен бассейн конечных размеров, заполненный однородный идеальной несжимаемой жидкостью, моделирующий Черное или Азовское море. Собственные колебания поверхности жидкости в бассейне, задаваемые в виде $U(x,y,t) = U_m(x,y) \cdot \exp(i\omega_m t)$, $m = 1,2,\ldots$, создают дополнительное давление σ на дно бассейна

$$\sigma(x,y,t) = \sigma_m(x,y) \cdot \exp(i\omega_m t), \qquad (2)$$

где $\sigma_m(x,y) = \rho \cdot g \cdot U_m(x,y)$, ρ – плотность жидкости в бассейне, ω_m и $U_m(x,y)$ – собственные частоты и соответствующие им распределения амплитуд, получаемые из решения спектральной задачи. Упругие колебания полупространства рассматривались в квазистатической постановке, так как инерционными членами в динамических уравнениях теории упругости на таких низких частотах можно, очевидно, пренебречь. Для рассматриваемого бассейна площади S предполагалось также, что максимальная его глубина H_{max} мала по сравнению с его горизонтальными размерами, то есть $H_{max} << \sqrt{S}$ (для Черного и Азовского морей – $H_{max}/\sqrt{S} \approx 10^{-3}$).

В силу известного в теории упругости принципа Сен-Венана, решение рассматриваемой задачи будет близко к решению задачи Буссинеска-Черрути [9] для точек полупространства, удаленных на расстояние более H_{max} от области приложения нагрузки. Учет формы дна бассейна в соответствующей задаче Буссинеска-Черрути проводился путем задания в области Ω на горизонтальной граничной плоскости полупространства поля напряжений, определяемого равенством (2) и градиентами дна, которое будет содержать как нормальные так и тангенциальные составляющие нагружения.

Точное решение задачи Буссинеска-Черрути для векторного поля перемещений $\vec{U}(x,y,z)$ при распределенном нагружении граничной плоскости $\vec{F}(x,y)$, согласно работе [9], представимо в виде интеграла

$$4\pi\mu\vec{U}(x,y,z) = -\iint_{\Omega}\left\{\frac{\vec{F}_n'}{R'} + \frac{\vec{R}'\left(\vec{F}_n'\cdot\vec{R}_n'\right)}{R'^3} + \right.$$
$$\left. + (1-2\nu)\left(\vec{F}_n'\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\frac{\vec{i}(x-x')}{R'+z} + \frac{\vec{j}(y-y')}{R'+z} + \vec{k}\ln(R'+z)\right)\right\} dx'\,dy' \tag{3}$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы вдоль осей x,y,z соответственно; $\vec{F}_n' = \vec{F}_n'(x',y',0)$ – вектор, проекции которого на оси x,y,z равны соответствующим напряжениям $\sigma_{xz}(x',y')$, $\sigma_{yz}(x',y')$, $\sigma_{zz}(x',y')$ на области нагружения Ω; $R' = \left|\vec{R}'\right| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2\right]^{1/2}$; μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

По известному полю перемещений $\vec{U} = \vec{U}(x,y,z)$ тензор деформаций ε, согласно работе [9], определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{U}}{d\vec{R}} + \vec{\nabla}\vec{U}\right), \tag{4}$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор точки наблюдения.

Для точки наблюдения $(x,y,z)\notin\Omega$, перемещение $\vec{U}(x,y,z)$ имеет производные любого порядка, поэтому возможно дифференцирование под знаком интеграла по свободным переменным x,y,z. Подставляя $\vec{U}$ из уравнения (3) в равенство (4), тензор деформации представим в виде

$$4\pi\mu\varepsilon = -\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\frac{d}{d\vec{R}} + \vec{\nabla}\right)\mathbf{K}(R')\vec{F}_n' dx'\,dy, \tag{5}$$

где $\mathbf{K}(R') = \left(K_{ij}(x-x',y-y',z),\ i,j=1,2,3\right)$ – матрица, элементы которой суть гладкие функции при ($x\neq x'$, $y\neq y'$, $z\neq 0$), задаваемые формулой (3). Для численного определения компонент тензора деформаций ε был разработан специальный вариант известного метода граничных элементов, использующий представление решения краевой задачи в виде потенциала простого слоя (5).

3. Приближенный расчет компонент тензора деформаций

Пусть область нагружения Ω представляется в виде $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{M} \Delta_\alpha$ то есть как объединение конечного числа треугольных областей Δ_α. Для каждой треугольной области вычислим интеграл I_α по следующей квадратурной формуле. Разобьем треугольник Δ_α прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 равных, подобных исходному, треугольников $\Delta_{i\alpha}$. Интеграл по Δ_α найдем приближенно $I_\alpha \approx I_\alpha^{(n)} = \sum_{i=1}^{n^2} \vec{I}_{i\alpha}$, где элементарные интегралы $\vec{I}_{i\alpha}$ вычисляются по одноточечной квадратурной формуле Гаусса для треугольной области

$$\vec{I}_{i\alpha} = c \cdot S_{i\alpha} \cdot \vec{F}'_{i\alpha} \cdot \mathbf{K}(x, y, z),$$

здесь $S_{i\alpha}$ – площадь элементарного треугольника, c – константа. Физически $\vec{I}_{i\alpha}$ – это смещение в точке наблюдения (x, y, z), вызванное сосредоточенной силой $\vec{P}_{i\alpha} = c \cdot S_{i\alpha} \cdot \vec{F}'_{i\alpha}$, приложенной в центре тяжести элементарного треугольника, которая равна внешней силе, действующей на весь элементарный треугольник. Для точек наблюдения $(x, y, z) \notin \overline{\Delta}_\alpha$ подынтегральные функции являются гладкими (имеют необходимое число производных), что гарантирует, при гладкой внутри области нагружения функции $\vec{F}'$, сходимость составной квадратурной формулы $I_\alpha^n \to I_\alpha$ при $n \to \infty$.

Так как интегралы можно дифференцировать по свободным переменным x, y, z, то очевидным образом получаем квадратурные формулы для компонент тензора деформаций $J_\alpha \approx J_\alpha^{(n)} = \sum_{i=1}^{n^2} \vec{J}_{i\alpha}$, где элементарные интегралы $\vec{J}_{i\alpha}$ вычисляются также по одноточечной квадратурной формуле Гаусса для треугольной области

$$\vec{J}_{i\alpha} = c \cdot S_{i\alpha} \cdot \vec{F}'_{i\alpha} \cdot \left(\frac{d}{d\vec{R}} + \vec{\nabla} \right) \mathbf{K}(x, y, z).$$

Погрешность вычисления интеграла для треугольной области Δ_α контролировалась по величине $\varepsilon_n = \left| J_\alpha^{(n+1)} - J_\alpha^{(n)} \right|$, число n увеличивалось до тех пор, пока значения $J_\alpha^{(n)}$ не стабилизируются в пределах заданной точности.

Численное решение задачи Буссинеска-Черрути, как для перемещений так и для деформаций, состоит теперь в суммировании вклада со стороны каждой треугольной области Δ_α в решение. Обозначим какую либо компоненту решения задачи для треугольной области Δ_α через U_α. Тогда решение задачи для всей области Ω определится как $U = \sum_{\alpha=1}^{M} U_\alpha$. Решение U_α вычисляется с погрешностью не превышающей ε_α такой, чтобы величина $\varepsilon = \sum_{\alpha}^{M} \varepsilon_\alpha$ не превосходила заданную погрешность ε_Ω. Очевидно, что для этого достаточно потребовать выполнения условия $\varepsilon_\alpha \le \varepsilon_\Omega / M$.

4. Результаты численного расчета деформаций, вызываемых сейшами Черного и Азовского морей

Теоретический расчет деформаций, вызываемых свободными колебаниями Черного и Азовского морей, проводился для точки на граничной плоскости упругого полупространства, соответствующей месту установки физического, регистрирующего деформации, прибора. Расчеты проводились в географической системе координат, ось OX декартовой системы координат выбиралась в направлении запад-восток, а ось OY – в направлении юг-север.

Таблица 1.1

Амплитуды деформаций в точке наблюдения,
вызываемые сейшами Черного моря

$t_{\text{ìèí}}$	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{xy}	$\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha}$
627	$-5{,}270\cdot10^{-12}$	$2{,}657\cdot10^{-12}$	$6{,}133\cdot10^{-11}$	$9{,}723\cdot10^{-11}$
449	$-2{,}616\cdot10^{-11}$	$2{,}645\cdot10^{-11}$	$-5{,}266\cdot10^{-11}$	$-1{,}167\cdot10^{-10}$
361	$4{,}004\cdot10^{-11}$	$-3{,}938\cdot10^{-11}$	$5{,}322\cdot10^{-13}$	$-4{,}532\cdot10^{-11}$
293	$-1{,}565\cdot10^{-12}$	$-1{,}245\cdot10^{-12}$	$6{,}551\cdot10^{-11}$	$1{,}084\cdot10^{-10}$
285	$3{,}385\cdot10^{-12}$	$-4{,}133\cdot10^{-12}$	$-3{,}529\cdot10^{-11}$	$5{,}430\cdot10^{-11}$
242	$-2{,}026\cdot10^{-11}$	$1{,}810\cdot10^{-11}$	$-5{,}638\cdot10^{-12}$	$3{,}081\cdot10^{-11}$

Таблица 1.2

Амплитуды вдоль главных направлений тензора деформаций, вызываемые сейшами Черного моря

$t_{ìèí}$	ε_1	ε_2	χ рад
627	$6{,}015 \cdot 10^{-11}$	$-6{,}277 \cdot 10^{-11}$	$8{,}177 \cdot 10^{-1}$
449	$5{,}900 \cdot 10^{-11}$	$-5{,}872 \cdot 10^{-11}$	2,125
361	$4{,}005 \cdot 10^{-11}$	$-3{,}939 \cdot 10^{-11}$	$6{,}700 \cdot 10^{-3}$
293	$6{,}411 \cdot 10^{-11}$	$-6{,}692 \cdot 10^{-11}$	$7{,}866 \cdot 10^{-1}$
285	$3{,}512 \cdot 10^{-11}$	$-3{,}587 \cdot 10^{-11}$	$-7{,}323 \cdot 10^{-1}$
242	$1{,}891 \cdot 10^{-11}$	$-2{,}107 \cdot 10^{-11}$	1,714

Таблица 2.1

Амплитуды деформаций в точке наблюдения,
вызываемые сейшами Азовского моря

$t_{ìèí}$	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{xy}	$\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha}$
851	$1{,}140 \cdot 10^{-13}$	$-7{,}001 \cdot 10^{-13}$	$6{,}232 \cdot 10^{-12}$	$1{,}079 \cdot 10^{-11}$
679	$-1{,}672 \cdot 10^{-12}$	$1{,}121 \cdot 10^{-12}$	$4{,}970 \cdot 10^{-12}$	$6{,}676 \cdot 10^{-12}$
485	$-3{,}590 \cdot 10^{-12}$	$3{,}666 \cdot 10^{-12}$	$1{,}470 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}622 \cdot 10^{-12}$
477	$1{,}298 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}799 \cdot 10^{-12}$	$1{,}937 \cdot 10^{-12}$	$4{,}944 \cdot 10^{-12}$
431	$2{,}452 \cdot 10^{-12}$	$-2{,}900 \cdot 10^{-12}$	$7{,}500 \cdot 10^{-13}$	$-4{,}238 \cdot 10^{-12}$
368	$-1{,}798 \cdot 10^{-12}$	$2{,}132 \cdot 10^{-12}$	$-8{,}250 \cdot 10^{-13}$	$3{,}567 \cdot 10^{-12}$

Таблица 2.2

Амплитуды вдоль главных направлений тензора деформаций,
вызываемые сейшами Азовского моря

$t_{ìèí}$	ε_1	ε_2	χ рад
851	$5{,}952 \cdot 10^{-12}$	$-6{,}539 \cdot 10^{-12}$	$7{,}528 \cdot 10^{-1}$
679	$4{,}887 \cdot 10^{-12}$	$-5{,}438 \cdot 10^{-12}$	$9{,}223 \cdot 10^{-1}$
485	$3{,}952 \cdot 10^{-12}$	$-3{,}876 \cdot 10^{-12}$	1,378
477	$2{,}229 \cdot 10^{-12}$	$-2{,}731 \cdot 10^{-12}$	$4{,}482 \cdot 10^{-1}$
431	$2{,}555 \cdot 10^{-12}$	$-3{,}004 \cdot 10^{-12}$	$1{,}366 \cdot 10^{-1}$
368	$2{,}298 \cdot 10^{-12}$	$-1{,}964 \cdot 10^{-12}$	1,770

В таблицах 1 и 2 представлены результаты численного расчета амплитуд компонент тензора деформаций ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}, вызванных сейшами Черного и Азовского морей. В расчетах предполагалось, что полупространство заполнено известняком и выбирались соответс т-вующие значения упругих постоянных: $\mu = 2{,}5 \times 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}29$. Расчеты выполнены только для длиннопериодных мод Черного и Азовского моря (период T указан в таблицах в минутах). Среднеквадратичная величина амплитуды каждой моды полагалась равной 10^{-2} метра, то есть нормировалась условием

$$\left[\frac{1}{S}\iint\limits_{\Omega} U_m^2(x,y)\,dx\,dy\right]^{1/2} = 10^{-2}\text{ м}, \tag{6}$$

где S – площадь соответствующего бассейна.

Деформации $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ и $\varepsilon_{\beta\beta}$ вдоль ортогональных направлений, задаваемых азимутальными углами α и β вычислялись по известным формулам теории упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon_{xy}\sin 2\alpha + \varepsilon_{yy}\cos^2\alpha \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_{xx}\cos^2\alpha - \varepsilon_{xy}\sin 2\alpha + \varepsilon_{yy}\sin^2\alpha\,. \end{aligned} \tag{7}$$

В таблицах 1 и 2 для каждого из рассчитанных собственных колебаний Черного и Азовского морей представлены также, следующие величины. Разность $(\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha})$ – теоретическая величина, которую должен регистрировать прибор по своей конструкции, амплитуды вдоль главных направлений тензора деформаций ε_1 и ε_2, угол χ между одним из главных направлений тензора деформаций в точке наблюдения и осью OX.

Список использованной литературы

1. *Иванов Ю. Б., Насонкин В. А., Нестеров В. В., Чехов В. Н.* Исследования литосферных деформаций, предшествующих землетрясениям, средствами большебазовой лазерной интерферометрии // Физика Земли – 1995. – № 7. – с. 51-62. 2. *Нестеров В. В., Насонкин В. А., Чехов В. Н.* Исследования сверхдлиннопериодных литосферных деформаций, предшествующих землетрясениям // Геофизический журнал. Киев. – 1994. – 16, – № 5. – с. 17-26. 3. *Чехов В. Н., Нестеров В. В., Иванов Ю. Б., Насонкин В. А.* Сверхдлиннопериодные литосферные деформации, возбуждаемые сейшевыми колебаниями // Докл. АН России. Геофизика. – 1994. – 336, – № 3. – с. 391-393. 4. *Иванов Ю. Б., Насонкин В. А., Нестеров В. В., Чехов В. Н.* Литосферные деформации, возбуждаемые сейшами Черного моря // Геофизический журнал. Киев. – 1994. – 16, – № 6. – с. 53-60. 5. *Блон П. Ле., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. – 480 с. 6. *Rao D. B.* Free gravitational oscillations in rotating rectangular basins // J. Fluid Mech. – 1966. – 23. – p. 523-555. 7. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М. – Л.: ОГИЗ, 1947. – 928 с. 8. *Ландау Л. Д., Ливщиц Е. М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 730 с. 9. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. – 940 с.

Поступила в редколлегию 21.12.97