УДК 517.432

С. А. КОНЕВА, старший преподаватель Г. П. КУХТА, доцент
Севастопольский государственный технический университет.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В статье установлено условие устойчивости по Ляпунову системы параболического типа с запаздыванием. Использована идея Н. Н. Красовского [1] применения функционалов вместо функций для второго метода Ляпунова.

Рассматривается система с распределенными параметрами и з а-паздыванием по времени.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right) + b\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j}\right) \quad (1)$$

$a,b,\tau - const$. $A_{ij}(x) = A_{ij}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)$ x – точки области $G \subset R^m$. На границе Γ области G задается однородное условие первого рода

$$u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Однородность условия не снижает общности задачи. В случае неодн о-родного условия реализуется линейная замена искомой функции, не м е-няющая типа уравнения (1).
Уравнение (1) сопровождается начальным условием

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \text{ при } \tau \le t \le 0. \quad (3)$$

Тривиальному решению соответствует нулевая начальная функция.
В работе [2] были доказаны существование и единственность решения задачи (1) – (3), принадлежащего вместе с производной по t пространству $L_2(G)$.

Матрица $\|A_{ij}(x)\|$ положительно определена. Для всех $x \in G$ выполняется условие

$$\sum_{ij=1}^{m} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2, \quad (4)$$

где α некоторая положительная постоянная.

Рассмотрим функционал

$$V(t) = \int_G u^2(x,t)dt + |b|\int_{t-\tau}^{t}\int_G\left(\sum_{ij=1}^{m} A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,s)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,s)}{\partial x_j}\right)dxds. \quad (5)$$

Функционал непрерывен, дифференцируем по t и определенно-положительный.

Рассчитаем его полную производную по t.

$$\frac{dV(t)}{dt}=2\int_G u\frac{\partial u}{\partial t}dx+|b|\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)dx-$$

$$-|b|\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j}\right)dx.$$

Вместо $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ под знаком первого интеграла пишем правую часть уравнения (1).

$$\frac{dV(t)}{dt}=2a\int_G\left(u(x,t)\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)\right)dx+$$

$$+2b\int_G\left(u(x,t)\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j}\right)\right)dx+$$

$$+|b|\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)dx-$$

$$-|b|\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j}\right)dx.$$

Выполним интегрирование по частям первых двух интегралов. Используем вторую формулу Грина [3]. При этом учитывается граничное условие (2), благодаря которому в названной формуле интегралы по поверхности Γ обращаются в нуль.

$$\frac{dV(t)}{dt}=-2a\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)dx-2b\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j}\right)dx+$$

$$+|b|\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)dx-|b|\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j}\right)dx.$$

Полученное выражение преобразуется в следующее:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -2(a-|b|)\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \right) dx - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) dx -$$

$$-2b\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx - |b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} = -2(a-|b|)\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) dx - \\ -|b| \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial (u(x,t) \pm u(x,t-\tau))}{\partial x_i} \frac{\partial (u(x,t) \pm u(x,t-\tau))}{\partial x_j} \right) dx \end{aligned} \qquad (6)$$

Знак плюс в подынтегральном выражении второго интеграла соотве т-ствует случаю $b > 0$ и знак минус – случаю $b < 0$. Под знаками обоих интегралов в правой части равенства (6) стоят положительно опред е-ленные квадратичные формы. Если коэффициент $a - |b| > 0$, то вся правая часть в этом равенстве неотрицательна. Чтобы сделать более оч е-видной справедливость этого утверждения используем условие (4) и перейдем от равенства (6) к следующему неравенству:

$$\frac{dV(t)}{dt} \le -2(a-|b|)\alpha \int_G \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right)^2 dx - |b|\alpha \int_G \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial (u(x,t) \pm u(x,t-\tau))}{\partial x_i} \right)^2 dx \le 0. \quad (7)$$

Последнее неравенство можно усилить, используя неравенство Фридрихса [3]

$$\int_G \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \ge \vartheta \int_G u^2 dx, \quad \vartheta > 0, \quad u|_{\Gamma} = 0.$$

$$\frac{dV(t)}{dt} \le -2(a-|b|)\alpha\vartheta \int_G u^2(t) dx - |b|\alpha\vartheta \int_G [u(t) \pm u(t-\tau)]^2 dx.$$

Очевидна не положительность $\frac{dV(t)}{dt}$ при условии $a > |b|$. Это неравенство обеспечивает устойчивость тривиального решения исходной задачи.

Замечание. Приведенные построения и выводы остаются справе д-ливыми для системы более общего вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) + b \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x_i},$$

где $a_i\, b_i\ \forall\, i$ постоянны.

Список использованной литературы

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 214 с.
2. Конева С. А., Кухта Г. П. Построение решения первой краевой задачи для уравнения параболического типа с запаздыванием в старшем члене. Сб. Докладов научной конференции ученых России и Украины. Прикладные проблемы механики жидкостей и газа. Севастополь, 1994.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: ГИФМЛ, 1957. - 476 с.