УДК 531.36

Ю. Н. КОНОНОВ, канд. физ.-мат. наук, Донецкий ун-т

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ЛИНЕЙНЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

Оценено влияние подвижных точечных масс (линейных осцилляторов), совершающих колебания вдоль оси симметрии волчка или вдоль осей, ортогональных оси симметрии, на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа.

Многие вращающиеся элементы современной техники имеют у пругие включения, которые могут совершать колебания в различных направлениях. Оценке влияния этих упругих включений на устойч ивость вращения твердого тела и посвящена настоящая работа. В лит ературе имеется достаточное число работ [1,2,4-7], посвященных этой проблеме, однако многие закономерности остаются еще не выясне нными.

Рассмотрим симметричное твердое тело, содержащее n подвижных точечных масс, которые могут совершать колебания под действ ием упругой силы и силы тяжести вдоль оси симметрии волчка или вдоль осей, ортогональных оси симметрии. Оценим влияние подви жных точечных масс (линейных осцилляторов) на устойчивость равн омерного вращения волчка Лагранжа. Предположим, что в невозм ущенном движении точечные массы находятся на оси симметрии волчка и волчок Лагранжа с линейными осцилляторами вращается как одно целое вокруг вертикали с угловой скоростью ω_0. Исследуем устойчивость этого равномерного вращения.

Введем обозначения:

A и C - главный экваториальный и соответственно осевой моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки;

m и m_i - масса твердого тела и соответственно i-ой точечной массы $\left(i = \overline{1,n}\right)$;

l - расстояние от неподвижной точки до центра масс твердого тела;

a_i - расстояние от неподвижной точки до i-ой точечной массы в невозмущенном движении;

x_i - отклонение i-ой точечной массы от положения относительного равновесия;

c_i - коэффициент жесткости i-ой пружины;

$\omega_i^2 = \dfrac{c_i}{m_i}$ - парциальная частота колебания i-ой точечной массы.

В случае почти вертикального вращения волчка выбор в качестве обобщенных координат эйлеровых углов малопригоден, поэтому за обобщенные координаты примем корабельные углы α, β и φ.

Углы α и β определяют положение оси симметрии волчка и остаются малыми при почти вертикальном ее положении.

1. Линейные осцилляторы совершают колебания вдоль оси симметрии волчка.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы [4]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}A\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}C\left(\dot{\varphi} + \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2 + T_1, \\ \Pi &= Mgl\cos\alpha\cos\beta + \Pi_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь T_1 и Π_1 – кинетическая и потенциальная энергия точечных масс:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[(x_i + a_i)^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\cos^2\alpha\right) + \dot{x}_i^2\right], \\ \Pi_1 &= g\cos\alpha\cos\beta\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i + a_i) + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i x_i^2}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Составим функцию Лагранжа и запишем уравнения Лагранжа второго рода. Полученная система дифференциальных уравнений допускает частное решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0 = const$, $x_i = 0$. Исследуем устойчивость этого частного решения. Для этого запишем уравнения возмущенного движения в переменных α, β и x_i:

$$\begin{aligned} &A^*\ddot{\alpha} - \beta_\varphi\dot{\beta} - M^*gd\alpha = 0; \\ &A^*\ddot{\beta} + \beta_\varphi\dot{\alpha} - M^*gd\beta = 0; \\ &\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$A^* = A + \sum_{i=1}^{n} m_i a_i^2, \quad M^* = m + \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$d = \left(ml + \sum_{i=1}^{n} m_i a_i\right)\Big/ M^*, \quad \beta_\varphi = C\left(\dot{\varphi} + \dot{\beta}\sin\alpha\right) = const.$$

Из уравнений (3) следует, что в первом приближении уравнения движения волчка и линейных осцилляторов распадаются на независимые уравнения, т.е. колебания линейных осцилляторов, находящихся на оси симметрии, не влияют на устойчивость движения волчка Лагранжа.

Пусть $\zeta = \alpha + i\beta$, тогда первые два уравнения системы (3) можно объединить

$$A^*\ddot{\zeta} + iC\omega_0\dot{\zeta} - M^* g d\zeta = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде $\zeta = \zeta_0 e^{i\omega_0 \lambda t}$, тогда характеристическое уравнение будет иметь вид

$$A^*\lambda^2 + c\lambda + M^* gd \big/ \omega_0^2 = 0$$

Необходимое условие устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с линейными осцилляторами, совершающими колебания вдоль оси симметрии, совпадает с известным критерием Маевского для системы с "замороженными" точечными массами

$$\omega_0^2 > \frac{4A^* M^* gd}{C^2} \tag{5}$$

и обобщает результаты работы [7] на случай n подвижных точечных масс.

2. Линейные осцилляторы совершают колебания вдоль осей, ортогональных оси симметрии волчка.

Предположим, что колебания всех линейных осцилляторов происходят в одной плоскости. Как и ранее, будем считать, что в невозмущенном движении волчок Лагранжа с линейными осцилляторами вращается как одно целое с угловой скоростью ω_0. Исследуем устойчивость этого равномерного вращения.

Кинетическая и потенциальная энергия системы имеет вид (1), где

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \Big[\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\cos^2\alpha\right)a_i^2 + \dot{x}_i^2 + 2a_i\dot{x}_i\left(\dot{\alpha}\cos\varphi - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\varphi\right) -$$
$$- 2a_i x_i\left(\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\alpha\sin\varphi + \dot{\alpha}\,\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\beta}\,\dot{\varphi}\cos\alpha\cos\varphi + \dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha\cos\varphi\right) +$$
$$+ x_i^2\left(\dot{\alpha}^2\cos^2\varphi - \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\alpha\sin 2\varphi + 2\dot{\beta}\,\dot{\varphi}\sin\alpha\right) + \dot{\beta}^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\varphi\right)\Big],$$

$$\Pi_1 = g\sum_{i=1}^{n} m_i \big[(\sin\beta\sin\varphi - \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi)x_i + a_i\cos\alpha\cos\beta\big] + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i x_i^2}{2}.$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода. Как и ранее, нас будет интересовать устойчивость "спящего" волчка. В этом случае будем считать малыми величины α, β, x_i и их производные.

В новых переменных $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, т.е. в полусвязанной системе координат

$$\tilde{\alpha} = \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi;$$
$$\tilde{\beta} = \beta\sin\varphi - \alpha\cos\varphi,$$

система уравнений возмущенного движения примет вид

$$A^*\ddot{\tilde{\alpha}} + \left[\left(C - A^*\right)\omega_0^2 - M^* gd\right]\tilde{\alpha} + \left(2A^* - C\right)\omega_0\dot{\tilde{\beta}} - 2\omega_0\sum_{i=1}^{n} m_i a_i \dot{x}_i = 0,$$

$$A^*\ddot{\tilde{\beta}} + \left[\left(C - A^*\right)\omega_0^2 - M^* gd\right]\tilde{\beta} - \left(2A^* - C\right)\omega_0\dot{\tilde{\alpha}} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} m_i a_i\left[\ddot{x}_i - \left(\omega_0^2 + \frac{g}{a_i}\right)x_i\right] = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{x}_i + \left(\omega_i^2 - \omega_0^2\right)x_i - \left(\ddot{\tilde{\beta}} - 2\omega_0\dot{\tilde{\alpha}} - \omega_0^2\tilde{\beta}\right)a_i + g\tilde{\beta} = 0.$$

Как видно из уравнений (4), уже в первом приближении линейные о с-цилляторы влияют на устойчивость движения волчка Лагранжа.

Представляя искомые функции в виде

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 e^{i\omega_0\lambda t},\ \tilde{\beta} = \tilde{\beta}_0 e^{i\omega_0\lambda t},\ \ x_i = x_{i0} e^{i\omega_0\lambda t},$$

запишем характеристическое уравнение для уравнений возмущенного движения (4):

$$\left[C - \Gamma_2 - xA^* + 4(x-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i a_i^2}{x - \Omega_i^2}\right]\times$$

$$\times\left[C - \Gamma_2 - xA^* + \sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i x + G)^2 m_i}{x - \Omega_i^2}\right] - \tag{5}$$

$$-(x-1)\left[2A^* - C - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i x + G)m_i a_i}{x - \Omega_i^2}\right]^2 = 0.$$

Здесь

$$\Gamma_2 = \frac{\Gamma}{\omega_0^2},\quad \Omega_i^2 = \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2},\ G = \frac{g}{\omega_0^2},\ \Gamma = M^* gd,\ x = 1 + \lambda^2.$$

Необходимое условие устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с линейными осциляторами определяется условием действительности всех корней λ_j уравнения (5) или условием $x_j - 1 > 0$ $(j = 1,\dots,2n+2)$.

Характеристическое уравнение (5) можно записать в виде

$$\left[D\prod_{i=1}^{n}\left(x - \Omega_i^2\right) + 4(x-1)\sum_{k=1}^{n}\left(E_k a_k\prod_{i=1}^{n}\left(x - \Omega_i^2\right)\right)\right]\times$$

$$\times\left[D\prod_{i=1}^{n}\left(x - \Omega_i^2\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(F_k^2 m_k\prod_{i=1}^{n}\left(x - \Omega_i^2\right)\right)\right] -$$

$$-(x-1)\left[\left(2A^* - C\right)\prod_{i=1}^{n}\left(x - \Omega_i^2\right) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(E_k F_k\prod_{i=1}^{n}\left(x - \Omega_i^2\right)\right)\right]^2 = 0$$

где

$$D = C - \Gamma_2 - xA^*,\ E_k = m_k a_k,\ F_k = a_k x + G.$$

Рассмотрим случай, когда m $(m \le n)$ линейных осцилляторов имеют одинаковые парциальные частоты $\omega_i = \omega$ $(\Omega_i = \Omega)$ для $i = \overline{1, m}$. Из уравнения (6) следует, что если m линейных осцилляторов имеют одинаковые частоты, то она принадлежит спектру системы волчок + линейные осцилляторы и кратность этой частоты будет $m-1$. В связи с наличием собственных частот возникает вопрос о возможности вну т-реннего резонанса. На основании общих теорем и по аналогии с раб о-той [3] можно утверждать, что и в этом случае элементарные делители всегда будут взаимно простыми и никаких резонансных явлений быть не может.

Так как $x_j - 1 > 0$, а $x_j = \Omega^2$, то $\omega > \omega_0$. Следовательно, частота m одинаковых линейных осцилляторов должна быть больше частоты собственного вращения волчка.

Пусть $n = 1$. В этом случае характеристическое уравнение (5) уд а-ется представить в виде

$$\left(x - \Omega_1^2\right)\left(k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0\right) = 0, \qquad (7)$$

откуда следует, что $\Omega_1^2 - 1 > 0$, т.е. $\omega_1 > \omega_0$.

В уравнении (7) сделаем замену $x = y + 1$ и рассмотрим соответству ю-щее кубическое уравнение

$$b_3 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0. \qquad (8)$$

Здесь

$$b_3 = A^* A m_1 > 0,$$

$$b_2 = -A^* \frac{c_1}{\omega_0^2} - m_1\left[A^{*2} - 2A^*(C + \Gamma_2) + C^2\right] + m_1^2 a_1\left[\left(A^* - 3C - \Gamma_2\right)a_1 - 2A^*G\right],$$

$$b_1 = \frac{C_1}{\omega_0^2}\left[2A^{*2} - 2A^*(C + \Gamma_2) + C^2\right] - m_1\left[A^{*2} + 2\Gamma_2\left(2A^* - C\right) + \Gamma_2^2\right] +$$
$$+ m_1^2\left[\left(A^* + 2C - 6\Gamma_2\right)a_1^2 + 2\left(2A^* - C - \Gamma_2\right)a_1 - A^*G^2\right],$$

$$b_0 = -\left(A^* - C + \Gamma_2\right)\left[\left(\frac{C_1}{\omega_0^2} - m_1\right)\left(A^* - C + \Gamma_2\right) + m_1^2 (G + a_1)^2\right].$$

Положим, что $\frac{m_1}{m} << 1$ и $\omega_0^2 > \frac{4A^*\Gamma}{C^2}$ (критерий Маевского). Тогда можно показать, что при достаточно малой массе m_1 уравнение (8) имеет действительные корни и знаки его коэффициентов будут следующими:

$$b_2 < 0,\; b_1 > \frac{C_1}{2\omega_0^2}\left(2A^* - C\right)^2 - m_1\left[A^{*2} + 2\Gamma_2\left(2A^* - C\right) + \Gamma_2^2\right] > 0,\; b_0 < 0,$$

и согласно теореме Декарта уравнение (8) имеет три положительных корня.

Таким образом, необходимое условие устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с линейными осцилляторами одинаковой частоты или с одним линейным осциллятором состоит в требовании, чтобы парциальная частота колебания линейного осциллятора была больше угловой скорости равномерного вращения волчка. На примере малой точечной массы видно, что к этому условию необходимо добавить выполнение критерия Маевского, следовательно,

$$\frac{4A^*\Gamma}{C^2} < \omega_0^2 < \frac{c_1}{m_1}$$

Можно предположить, что в общем случае это условие остается необходимым.

Список использованной литературы

1. *Буров А. А.* О движении твердого тела, несущего подвижную массу на пружине // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. - М.: ВЦ АН СССР, 1987. - с. 3-12. 2. Итоги науки и техники. Общая механика. - Т. 5. - М.: ВИНИТИ, 1982. - 200 с. 3. *Кононов Ю. Н.* Об устойчивости стационарного вращения волчка Лагранжа с n эллипсоидальными полостями // Математическая физика и нелинейная механика. Респ. межвед. сб., Киев, Наукова думка, 1990, вып. 14. 4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. - М.: ФМ, 1961. - 824 с. 5. *Савченко А. Я., Галло И. В.* Исследование влияния изменения инерционных характеристик твердого тела на устойчивость его равномерных вращений: Ин-т прикл. математики и механики АН Украины. - Донецк, 1994. - 29 с. Деп. в ГНТБ Украины. 6. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. - 1973. - №4. - с. 33-44. 7. *Шило А. П.* Устойчивость стационарных движений гироскопа Лагранжа с подвижной точечной массой // МТТ, Киев, 1981, №13. - с. 97-101.

Поступила в редколлегию 3.09.96