УДК 517.432

А. В. КУЖЕЛЬ, д-р физ.- мат. наук, Симфероп. ун-т

КАНОНИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Вводится понятие канонических расширений эрмитовых операторов. Такие расширения представляют не только самостоятельный интерес, но и существенно используются (в частности теорема 3) при построении пространств граничных значений (ПГЗ) эрмитовых операторов с различными дефектными числами. В последние годы ПГЗ находят важные применения при изучении различных классов расширений эрмитовых операторов, а также в теории рассеяния.

Пусть A – замкнутый эрмитов оператор с конечными дефектным числами, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Без существенного ограничения общности можем считать, что замкнутая линейная оболочка $\mathfrak{D}_A \vee \Delta_A = \mathscr{H}$, где $\mathfrak{D}_A$ и Δ_A – соответственно область определения и множество значений оператора A. Тогда как показано в [1], при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ дефектные подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ оператора A линейно независимы.

Оператор S называется регулярным расширением оператора A (записывается: $S \in \mathscr{P}(A)$), если $A \subset S$ и

$$(Ax, y) = (x, Sy) \qquad \left(x \in \mathfrak{D}_A, y \in \mathfrak{D}_S\right).$$

Если $S \in \mathscr{P}(A)$ и $\lambda \,\overline{\in}\, \sigma_p(S)$ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), то в соответствии с формулами фон Неймана, векторы x и Sx $\left(x \in \mathfrak{D}_S\right)$ представимы в виде

$$x = x_0 + x_\lambda + \Phi x_\lambda, \qquad Sx = Ax_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda \Phi x_\lambda, \tag{1}$$

где $x_0 \in \mathfrak{D}_A$, $x_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi$, а Φ – некоторый линейный оператор, действующий из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и такой, что линеалы $\mathfrak{D}_A$ и $(\Phi + I)\mathfrak{D}_\Phi$ линейно независимы.

Определение. Всюду плотное замкнутое регулярное расширение S оператора A называется **каноническим,** если

$$\mathfrak{D}_\Phi = \mathfrak{N}_\lambda, \qquad \mathfrak{D}_S \cap \mathfrak{D}_{S^*} = \mathfrak{D}_A. \tag{2}$$

Если S – каноническое расширение оператора A и $\lambda \,\overline{\in}\, \sigma_p(S)$, то $\bar\lambda \,\overline{\in}\, \sigma_p\left(S^*\right)$ и векторы y и $S^* y$ $\left(y \in \mathfrak{D}_{S^*}\right)$ представимы в виде

$$y = y_0 + y_{\bar\lambda} + \Phi^* y_{\bar\lambda}, \quad S^* y = Ay_0 + \lambda y_{\bar\lambda} + \bar\lambda \Phi^* y_{\bar\lambda}, \tag{3}$$

где $\Phi^* : \mathfrak{N}_{\bar\lambda} \to \mathfrak{N}_\lambda$, причем линеалы $\mathfrak{D}_A$ и $\left(\Phi^* + I\right)\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ линейно независимы.

На основании предыдущего

$$\mathfrak{D}_S = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathscr{L}_\Phi, \qquad \mathfrak{D}_{S^*} = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathscr{L}_{\Phi^*}, \tag{4}$$

где

$$\mathscr{L}_\Phi = (\Phi + I)\mathfrak{N}_\lambda, \qquad \mathscr{L}_{\Phi^*} = (\Phi^* + I)\mathfrak{N}_{\bar\lambda}. \tag{5}$$

Теорема 1. Линеалы (5) линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Ker}\left(I - \Phi^*\Phi\right) = \{0\}, \ \operatorname{Ker}\left(I - \Phi\Phi^*\right) = \{0\} \tag{6}$$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что если имеет м е-сто одно из равенств (6), то выполняется и другое. Действительно, пусть $\operatorname{Ker}\left(I - \Phi^*\Phi\right) = \{0\}$. Предположим, что $x \in \operatorname{Ker}\left(I - \Phi\Phi^*\right)$. Так как оператор $I - \Phi\Phi^*$ действует в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, то $x = x_{\bar\lambda}$ и

$$\left(I - \Phi\Phi^*\right)x_{\bar\lambda} = 0. \tag{7}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор Φ^*, получим, что

$$\left(I - \Phi^*\Phi\right)\Phi^* x_{\bar\lambda} = 0$$

и, следовательно, $\Phi^* x_{\bar\lambda} = 0$. Но тогда, на основании (7), $x = x_\lambda = 0$.

Аналогично, если имеет место второе равенство из (6), то спр а-ведливо и первое равенство.

Пусть теперь линеалы $\mathscr{L}_\Phi$ и $\mathscr{L}_{\Phi^*}$ линейно независимы и $x_\lambda \in \operatorname{Ker}\left(I - \Phi^*\Phi\right)$. Рассмотрим вектор $x = x_\lambda + y_{\bar\lambda}$, где $y_{\bar\lambda} = \Phi x_\lambda$. Ясно, что $x \in \mathsf{L}_\Phi$. При этом, с учетом равенства $x_\lambda = \Phi^*\Phi\, x_\lambda = \Phi^* y_{\bar\lambda}$,

$$x = x_\lambda + \Phi x_\lambda = \Phi^* y_{\bar\lambda} + y_{\bar\lambda} \in \mathscr{L}_{\Phi^*}$$

и, следовательно, $x = 0$ (так как $\mathscr{L}_\Phi \cap \mathscr{L}_{\Phi^*} = \{0\}$). Но тогда $x_\lambda = \Phi x_\lambda = 0$ (так как $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, $\Phi x_\lambda \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_{\bar\lambda} = \{0\}$). Следовательно $\operatorname{Ker}\left(I - \Phi^*\Phi\right) = \{0\}$.

Пусть теперь наоборот – известно, что имеют место равенства (6). Предположим, что $x \in \mathsf{L}_\Phi \cap \mathsf{L}_{\Phi^*}$. Тогда

$$x = x_\lambda + \Phi x_\lambda = y_{\bar\lambda} + \Phi^* y_{\bar\lambda},$$

откуда находим, что

$$x_\lambda - \Phi^* y_{\bar\lambda} = y_{\bar\lambda} - \Phi x_\lambda = 0 \tag{8}$$

(последнее равенство на основании того, что векторы $x_\lambda - \Phi^* y_{\bar\lambda}$ и $y_{\bar\lambda} - \Phi x_\lambda$ принадлежат соответственно подпространствам $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$).

Из (8) находим, что

$$x_\lambda = \Phi^* y_{\bar\lambda} = \Phi^*\Phi x_\lambda,$$

то есть $\left(I-\Phi^*\Phi\right)x_\lambda = 0$ и, следовательно, $x_\lambda = 0$.

Таким образом, $x=0$, то есть $\mathscr{L}_\Phi \cap \mathscr{L}_{\Phi^*} = \{0\}$.

Замечание. Так как оператор $I-\Phi^*\Phi$ самосопряженный, то при условии (6) оператор $\left(I-\Phi^*\Phi\right)^{-1}$ существует и определен на всем пространстве $\mathfrak{N}_\lambda$.

Точно так же, при условии (6), оператор $\left(I-\Phi^*\Phi\right)^{-1}$ действует в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и определен на всем пространстве $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$.

Теорема 2. Если S – каноническое расширение замкнутого эрмитова оператора A, то при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ линеалы $\mathscr{L}_\Phi$ и $\mathscr{L}_{\Phi^*}$ линейно независимы и

$$\mathscr{L}_\Phi \dotplus \mathscr{L}_{\Phi^*} = \mathfrak{N}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \tag{9}$$

где $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ – дефектные подпространства оператора A.

Доказательство. Пусть S – каноническое расширение оп е-ратора A и $h \in \mathsf{L}_\Phi \cap \mathsf{L}_{\Phi^*}$. Тогда

$$h = x_\lambda + \Phi x_\lambda = y_{\bar\lambda} + \Phi^* y_{\bar\lambda}$$

и, следовательно, вектор $x = x_0 + h \in \mathfrak{D}_S \cap \mathfrak{D}_{S^*}$ при любом x_0 из $\mathfrak{D}_A$. При этом, если $h \neq 0$, то, на основании (4), $x \in \mathfrak{D}_A$, что противоречит второму равенству из (2).

Таким образом, линеалы $\mathscr{L}_\Phi$ и $\mathscr{L}_{\Phi^*}$ линейно независимы. При этом включение

$$\mathscr{L}_\Phi \dotplus \mathscr{L}_{\Phi^*} \subset \mathfrak{N}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$$

очевидно. Остается обосновать обратное включение.

Пусть $x = x_\lambda + x_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Покажем, что уравнение

$$\left(I+\Phi\right)h_\lambda + \left(I+\Phi^*\right)h_{\bar\lambda} = x \tag{10}$$

разрешимо относительно $h_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ и $h_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Действительно, переп и-сывая (10) в виде

$$\left(h_\lambda + \Phi^* h_{\bar\lambda}\right) + \left(h_{\bar\lambda} + \Phi h_\lambda\right) = x_\lambda + x\bar\lambda, \tag{11}$$

получим систему операторных уравнений относительно h_λ и $h_{\bar\lambda}$:

$$\begin{cases} h_\lambda + \Phi^* h_{\bar\lambda} = x_\lambda, \\ h_{\bar\lambda} + \Phi h_\lambda = x_{\bar\lambda}. \end{cases} \tag{12}$$

Применяя к обеим частям второго равенства оператор Φ^* и вычитая полученное равенство из первого, получим, что

$$\left(I - \Phi^*\Phi\right) h_\lambda = x_\lambda - \Phi^* x_{\bar\lambda}. \tag{13}$$

А так как линеалы $\mathscr{L}_\Phi$ и $\mathscr{L}_{\Phi^*}$ линейно независимы, то, на основании теоремы 1, оператор $I - \Phi^*\Phi$ обратим. Следовательно, с учетом раве н-ства (13)

$$h_\lambda = \left(I - \Phi^*\Phi\right)^{-1}\left(x_\lambda - \Phi^* x_{\bar\lambda}\right).$$

Такие же рассуждения показывают, что

$$h_{\bar\lambda} = \left(I - \Phi\Phi^*\right)^{-1}\left(x_{\bar\lambda} - \Phi x_\lambda\right).$$

При указанных значениях h_λ и $h_{\bar\lambda}$ имеет место равенство (11). А это означает, что

$$\mathfrak{N}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda} \subset \mathscr{L}_\Phi \dotplus \mathscr{L}_{\Phi^*}.$$

Теорема 3. Пусть S – каноническое расширение симметрич е-ского (плотно заданного) оператора A. Тогда произвольный вектор x из $\mathfrak{D}_A$ представим в виде

$$x = x_0 + \varphi + \varphi_*, \tag{14}$$

где $x_0 \in \mathfrak{D}_A$, $\varphi \in \mathscr{L}_\Phi\left(\subset \mathfrak{D}_S\right)$, $\varphi_* \in \mathscr{L}_{\Phi^*}\left(\subset \mathfrak{D}_{S^*}\right)$. При этом

$$A^* x = Ax_0 + S\varphi + S^*\varphi_*. \tag{15}$$

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{D}_{A^*}$, $x = x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}$, где, на основании равенства (9),

$$x_\lambda + x_{\bar\lambda} = \varphi + \varphi_* \quad (\varphi \in \mathscr{L}_\Phi, \varphi_* \subset \mathscr{L}_{\Phi^*}). \tag{16}$$

Этим равенство (14) обосновано. При этом, так как, на основании (5), $\varphi = \varphi_\lambda + \Phi\varphi_\lambda$ $(\varphi_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda)$, то $A^*\varphi = \bar\lambda\varphi_\lambda + \lambda\Phi\varphi_\lambda = S\varphi$ и, аналогично, $A^*\varphi_* = S^*\varphi_*$. Но тогда

$$A^* x = Ax_0 + A^*\left(x_\lambda + x_{\bar\lambda}\right) = Ax_0 + A^*\varphi + A^*\varphi_* = Ax_0 + S\varphi + S^*\varphi_*.$$

Список использованной литературы

1. *Кужель А. В.* Расширения эрмитовых операторов. – К.: Вища школа, 1989. – 55 с. 2. *Kuzhel A.* Characteristic Function and Models of Nonself - Adjoint Operators. – Kluwer Academic Publishers, 1996. – 278 pp.

Поступила в редколлегию 11.12.97