УДК 531.36

С. К. ПЕРСИДСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, Симфероп. ун-т

О ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАЗИОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Вводится понятие квазиоднородного многочлена. Приведены критерии знакоопределенности квазиоднородных многочленов в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ и произвольном октанте этого пространства; рассмотрены приложения к исследованию устойчивости некоторых нелинейных систем.

В работах [1,2] рассматривались функции вида

$$U(x) = \sum_{s,k=1}^{n} B_{sk}\varphi_s(x_s)\varphi_k(x_k) \quad (B_{sk} = B_{ks}), \tag{1}$$

где $\varphi_s(x_s)$ - непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\varphi_s(x_s)x_s > 0 \text{ при } x_s \neq 0 \left(s = \overline{1,n}\right) \tag{2}$$

Положим $\varphi_s(x_s) = y_s\left(s = \overline{1,n}\right)$, тогда (1) принимает вид

$$V(y) = \sum_{s,k=1}^{n} B_{sk}\, y_s\, y_k, \qquad \text{где} \quad y \in \boldsymbol{R}_y^n \tag{3}$$

легко видеть, что знакоопределенность (знакопостоянство) квадр атичной формы $V(y)$ в $\boldsymbol{R}_y^n$ равносильно [1, 2] знакоопределенности (знакопостоянству) "квазиквадратичной формы" $U(x)$ в $\boldsymbol{R}_x^n$. рассмотрим "квазиоднородный многочлен" произвольной степени $m > 2$ вида:

$$U(x) = \sum_{s_1+\ldots+s_n=m} a_{s_1+\ldots+s_n}\varphi_1(x_1)^{s_1}\ldots\varphi_n(x_n)^{s_n} \tag{4}$$

где $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют условиям (2).

Положим $\varphi_s(x_s) = y_s$, тогда из (4) получаем однородный мног очлен

$$V(y) = \sum_{s_1+\ldots+s_n} a_{s_1+\ldots+s_n} y_1^{s_1}\ldots y_n^{s_n} \quad \left(y \in \boldsymbol{R}_y^n\right) \tag{5}$$

Нетрудно, видеть, что знакоопределенность однородного многочлена (5) в $\boldsymbol{R}_y^n$ равносильна знакоопределенности в $\boldsymbol{R}_x^n$ квазтоднородного многочлена (4).

Используя результаты из [3] приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а I. Пусть m - четно, тогда для положительной знак оопределенности квазиоднородного многочлена (4) необходимо и до статочно, чтобы соответствующая однородная форма (5) была полож и-тельной на всех вещественных решениях нелинейной системы

$$\frac{\partial V(y)}{\partial y_s} = mV(y)y_s = 0 \quad \left(s=\overline{1,m}\right) \; \sum_{s=1}^{n} y_s^m = 1 \tag{6}$$

Пусть, далее, $K(\alpha_1,...,\alpha_n)$ - заданный конус в $\boldsymbol{R}_x^n$ с параметрами α_s [2]. Например неотрицательный октант $K_+^n \subset \boldsymbol{R}^n$ имеет параметры $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 1$. Положив $y_s = \alpha_s \eta_s$ получим форму

$$W(\eta) = \sum_{s_1+...+s_n=m} b_{s_1,...,s_n} \eta_1^{s_1} .. \eta_n^{s_n}, \qquad \text{где } b_{s_1,...,s_n} = a_{s_1,...,s_n} \alpha_1^{s_1} ... \alpha_n^{s_n}.$$

Затем, сделав замену $\eta_s = z_s^2$ приходим к квазиоднородному многочл е-ну $2m$ вида:

$$W_1(z) = \sum_{s_1+...+s_n=m} b_{s_1,...,s_n} z_1^{2s_1} ... z_n^{2s_n} \tag{7}$$

Т е о р е м а II. Квазиоднородный многочлен (4) будет при л ю-бых $\varphi_s(x_s)$, удовлетворяющих условию (2), функцией положительной знакоопределенной в заданном конусе $K(\alpha_1,...,\alpha_n)$, тогда и только т о-гда, когда соответствующая форма $W_1(z)$ степени $2m$ положительна на всех вещественных решениях нелинейной системы

$$\frac{\partial W_1(z)}{\partial z_s} = 2mW_1(z)z_s \quad \left(s=\overline{1,n}\right), \qquad \sum_{s=1}^{n} z_s^{2m} = 1 \tag{8}$$

При $n = 2$ из теорем I и II в соответствии с соотношениями (6) и (8) н е-трудно получить следующие алгебраические критерии знакоопред е-ленности соответствующего квазиоднородного многочлена

$$U(x_1, x_2) = \sum_{s=0}^{m} a_s \varphi_1(x_1)^{m-s} \cdot \varphi_2(x_2)^s \tag{9}$$

Т е о р е м а III. Пусть m - четно и коэффициенты a_0 и a_m положи-тельны, тогда для положительной знакоопределенности квазиодно-родного многочлена (9) необходимо и достаточно отсутствие вещес т-венных корней у с оответствующего многочлена

$$P(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} a_s \lambda^{m-s},$$

Т е о р е м а IV. Пусть $K(\alpha_1,\alpha_2)$заданный конус в пространстве $\boldsymbol{R}_x^2$ и $b_0 > 0$, $b_m > 0$, где $b_s = a_s \alpha_1^{m-s} \cdot \alpha_2^s$. Тогда для положительной знакоо п-ределенности функции $U(x_1, x_2)$ вида (9) в этом конусе, необходимо и достаточно отсутствие положительных корней у многочлена $P(\mu) = \sum_{s=0}^{m} a_s \mu^{m-s}$.

В качестве примера на применение теоремы II рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x_s' = -\varphi_s(x_s) P_s(\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n)) \quad (s=\overline{1,n}), \tag{10}$$

где $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяет условиям (2) и непрерывны, а P_s - квазимногочлены степени $m \geq 1$. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а V. Пусть $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – заданный конус в пространстве $\boldsymbol{R}_s^n$.

Если при некоторых постоянных $a_s > 0$ квазиоднородный многочлен

$$P(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s\, \alpha_s\, \varphi_s(x_s) P_s(\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n)) \tag{11}$$

является функцией положительной знакоопределенной в $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, то в этом конусе решения системы (10) монотонно устойчивы.

Действительно, положим $V(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s\, \alpha_s\, x_s$, тогда в силу (II) $V' = -P(x)$, причем решения системы (II), проходящие при $t = t_0 \geq 0$ через некоторую точку $x_0 \in K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ остаются в этом конусе [2], что и доказывает теорему.

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1^3\left(2x_2^5 + x_1^3\right); \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2^5\left(x_2^5 - x_3^7\right), \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_3^7\left(26x_3^7 - 5x_2^5\right)$$

Положим $V = x_1 + x_2 + x_3$, тогда в силу рассматриваемой системы V' представляет квазимногочлен

$$V' = -\left(x_1^6 + x_2^{10} + 26x_3^{14} + 2x_2^5 x_1^3 - 10x_3^7 x_2^5\right)$$

Для исследования знакоопределенности V' в конусе $K(1,1,1)$ положим $x_1^3 = y_1$; $x_2^5 = y_2$; $x_3^7 = y_3$ и придем к квадратичной форме

$$W(y) = -\left(y_1^2 + y_2^2 + 26y_3^2 + 2y_1y_2 - 10y_2y_3\right).$$

Нетрудно видеть, что $-W(y)$ является в конусе $K_y(1,1,1)$ функцией положительной знакоопределенной, что равносильно отрицательной знакоопределенности квазимногочлена $V^1(x_1,x_2,x_3)$ в конусе $K_x(1,1,1)$.

Следовательно, в конусе $K_x(1,1,1)$ решения рассматриваемой системы монотонно устойчивы.

Рассмотрим далее нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = P_{s1}\varphi_1(x_1) + \ldots + P_{sn}\varphi_n(x_n) \qquad \left(s = \overline{1,n}\right) \tag{12}$$

где P_{sk} - вещественные постоянные, а $\varphi_s(x_s)$ - непрерывные функции удовлетворяющие неравенствам (2) и соотношениям

$$\int_0^{x_s} \varphi_s(\tau)d\tau \to \infty \text{ при } |x_s| \to \infty \qquad \left(s = \overline{1,n}\right). \tag{13}$$

Для исследования устойчивости системы (1) используем функцию Ляпунова

$$V(x) = \sum_{s=1}^{n} A_{s_0} \int_0^{x_s} \varphi_s(\tau)d\tau, \quad \text{где } A_s > 0 \qquad \left(s = \overline{1,n}\right) \tag{14}$$

рассмотренную в работе [1]. Ясно, что ее полная производная

$$V' = \sum_{s,k=1}^{n} B_{sk}\varphi_s(x_s)\varphi_k(x_k) \qquad (B_{sk} = B_{ks})$$

представляет собой, в силу системы (12), квазиквадратичную форму вида (1).

Если $V'_{(12)} < 0$, то система (12) устойчива абсолютно [1], в случае, когда $V'_{(12)} > 0$ то этой системы имеет место полная абсолютная неустойчивость [2].

Нетрудно видеть, что при этом для V' будут выполняться оценки, характерные для квадратичных форм, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\mu\, a\|\varphi\|^2 \le V'(x) \le \mu\, b\|\varphi\|^2; \qquad \|\mathrm{grad} V\| \le d\|\varphi\| \tag{15}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, а $\mu = -1$ в случае абсолютной устойчивости системы (12) и $\mu = -1$ если для системы имеет место полная абсолютная неустойчивость.

Рассмотрим сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$x_i' = A_i\varphi_i(x_i) + F_i(t, \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{16}$$

где $x \in \boldsymbol{R}^{n_i}$; $\sum_{i=1}^{m} n_i = m$; $x(x_1, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^{n_1} \times \ldots \times \boldsymbol{R}^{n_m}$

(x_i - подвектор вектора x), A_i - постоянные матрицы размерности

$$n_i \times n_i; \quad \varphi_i(x_i) = \left(\varphi_{i_1}\left(x_{i_1}\right), \ldots, \varphi_{i_{n_i}}\left(x_{i_{n_i}}\right)\right)^T$$

Будем предполагать, что для каждой изолированной подсистемы

$$x_i' = A_i\varphi_i(x_i) \qquad \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{17}$$

существует соответствующая функция Ляпунова вида (14) для которой выполняются неравенства

$$a_i\mu_i\|\varphi_i\|^2 \le V_i(x_i) \le \mu_i b_i\|\varphi_i\|^2; \;\; \|\mathrm{grad}V_i\| \le d_i\|\varphi_i\| \tag{18}$$

$$a_i>0,\; b_i>0,\; d_i>0,\; \left(i=\overline{1,m}\right),$$

где $\mu_i=-1$, если i -ая изолированная подсистема абсолютно устойчива и $\mu_i=-1$, если для указанной подсистемы имеет место полная абс о-лютная неустойчивость. Будем предполагать, что функции $\varphi_{ik}(x_{ik})$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_{i_k}\left(x_{i_k}\right)x_{i_k}>0 \;\; \text{при } x_{i_k}\ne 0, \quad \int_0^{x_{i_k}}\varphi_{i_k}(\tau)d\tau\to\infty \quad \text{при } \left|x_{i_k}\right|\to\infty \tag{19}$$

Допустим также, что по отношению к функциям $V_i(x_i)$ величины $F_i(t,\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_m(x_m))$ принадлежат к классу H, т.е. выполняются [4] неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\langle \mathrm{grad}V_i(x_i),F_i\rangle \le \sum_{i,k=1}^{m} d_{i_k}\|\varphi_i\|\|\varphi_k\| \qquad (d_{ik}=d_{ki}) \tag{20}$$

Положим $W(x)=\sum_{i=1}^{m}V_i(x_i)$. В силу полной системы (16) на основании (20) имеем:

$$W'(x)\le \sum_{i,k=1}^{m}B_{i_k}\|\varphi_i\|\|\varphi_k\|, \text{ где } B_{i_k}=d_{i_k}+\delta_{i_k}\mu_i b_i \tag{21}$$

(δ_{i_k} - символ Кронекера).

Т е о р е м а VI. Если при сделанных выше предположениях отн о-сительно системы (16) и ее изолированных подсистем, квадратичная форма $U(z)=\sum_{i,k=1}^{m}B_{i_k}z_i z_k$ является отрицательной знакоопределенной функцией в $\boldsymbol{R}_z^m$ или в неотрицательном октанте K_+^m этого пространст-ва, то система (16) абсолютно устойчива. Действительно, в этом случае в силу полной системы $W^1(x)$ будет функцией знакоопределенной о т-рицательной, кроме того, $W(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$, что и доказывает теорему.

Заметим, что в отличие от известной теоремы Груйича [4] в рас-смотренной выше теореме изолированные подсистемы не являются экспоненциально устойчивыми или экспоненциально неустойчивыми. в качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= A_1\varphi(x) + F_1(t, \varphi(x), \psi(y)) \\ y' &= A_2\psi(y) + F_2(\varphi(x)) \end{aligned} \qquad (22)$$

где

$$x = (x_1, x_2)^T;\ y = (y_1, y_2)^T;$$

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))^T,\ \psi(y) = (\psi_1(y_1), \psi_2(y_2))^T,$$

где

$$\varphi_s(x_s)x_s > 0 \text{ при } x_s \neq 0 \quad (s = 1, 2)$$

$$\psi_s(y_s)y_s > 0 \text{ при } y_s \neq 0 \quad (s = 1, 2).\ \int_0^{x_s} \varphi_s(\tau)d\tau \to \infty \text{ при } |x_s| \to \infty \ (s = 1, 2)$$

и

$$\int_0^{y_s} \psi_s(\tau)d\tau \to \infty \text{ при } |y_s| \to \infty.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} -5\varphi_1(x_1)\exp(-\sin^2 t) + 2\alpha\psi_1(y_1) \\ -5\varphi_2(x_2)\exp(-\cos^2 t) + 2\alpha\psi_2(y_2) \end{pmatrix};$$

$$F_2 = \beta\sqrt{2}\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) \end{pmatrix},$$

где α и β - параметры.

Для изолированных подсистем $x' = A_1\varphi(x)$, $y' = A_2\psi(y)$, положим

$$U(x) = \int_0^{x_1} \varphi_1(\tau)d\tau + \int_0^{x_2} \varphi_2(\tau)d\tau \text{ и } V(y) = \int_0^{y_1} \psi_1(\tau)d\tau + \int_0^{y_2} \psi_2(\tau)d\tau.$$

Пусть $W(x, y) = U(x) + V(y)$, тогда в силу полной системы (22)

$$W' \leq -3\|\varphi\|^2 - 2\|\psi\|^2 + 2(\alpha + \beta)\|\varphi\|\|\psi\|.$$

Соответствующая квадратичная форма

$$W_1(z_1, z_2) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 2(\alpha + \beta)z_1 z_2$$

будет отрицательной знакоопределенной, если $(\alpha + \beta)^2 < 6$; при выполнении последнего неравенства система (22) устойчива абсолютно.

Список использованной литературы

1. *Е. А. Барбашин.* Функции Ляпунова. "Наука", М. 1970, 239 с. 2. *С. К. Персидский.* К вопросу об абсолютной устойчивости. Изв. АН СССР, Автоматика и телемеханика. 1969, №12. с. 5-11. 3 *Его же,* О знакоопределенности квазиоднородных многочленов. III крымская Международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его применение". Тезисы докладов. Изд. Сим. ун-та, 1996, с. 19-21. 4. *Л. Т. Груйич, А. А. Мартынюк, М. К. Риббенс-Пагела.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев, Наукова думка, 1984, с. 307.