УДК 517.925:62-50

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Е.Ф. Старожилов, канд. техн. наук, доц., Сев. ГТУ

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему управления конечным положением, описываемую взаимосвязанными системами непрерывных и разностных уравнений вида:

$$\begin{aligned} &\dot{y} = A_1 y + b_1 d_1^T y/(t - t_f), t \in I \setminus \Theta, \\ &y(t) = A_2 y(t-0) + b_2 d_2^T y(t-0)/(t - t_f), t \in \Theta, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $y \in R^n$; $\Theta = \{t_k : t = kh,\ h > 0,\ k = 1,2...;\ t < t_f\}$; $I = [0, t_f)$; A_1, A_2 – постоянные $n \times n$ – матрицы; $b_1, d_1, b_2, d_2 \in R^n$.

Решение $y(y_0, t_0; t)$ системы (1) с начальным значением y_0, заданным в точке t_0, определим как непрерывную при $t \notin \Theta$ функцию, непрерывную справа в точках $t \in \Theta$, удовлетворяющую уравнениям системы на интервале $0 \le t < t_f$.

При $t \to t_f$ система стремится к некоторому конечному состоянию, которое определяет результат управления. Цель процесса управления – приведение вектора состояния системы в малую окрестность нуля. Важным в практическом отношении является анализ поведения решений системы (1) при увеличении параметра t_f. Так же как и в непрерывном случае [1] выделим два возможных характера поведения решений.

Систему (1) называют устойчивой, если решение $y(y_0, t_0; t)$ на интервале $T_1 \le t_f - t \le T_2$ (T_1, T_2 – произвольно выбранные фиксированные положительные числа) при $t_f \to \infty$ остается ограниченным, и асимптотически устойчивой, если оно на этом интервале стремится к нулю. Если решение неограниченно на указанном интервале, то система неустойчива.

Известно решение задачи устойчивости для непрерывных [1,2] и некоторых типов непрерывно-дискретных [3] систем с особенностью в коэффициентах. Далее рассмотрим задачу асимптотического анализа поведения решений системы (1), являющейся моделью однотактной непрерывно-дискретной системы более общего типа по сравнению с моделями, представленными в работе [3].

2. Основной случай. Для исследования устойчивости воспользуемся обобщением второго метода Ляпунова на класс непрерывно-дискретных систем [4]. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть собственные числа матрицы $P = A_2 \exp(A_1 h)$ лежат внутри окружности единичного радиуса, тогда решения системы (1) устойчивы. Если хотя бы одно собственное число матрицы P лежит вне окружности единичного радиуса, то решения системы (1) неустойчивы.

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова [4] в виде

$$V(y_0,t_0)=\int_0^h y^T(y_0,t_0;t_0+\theta)G^T(t_0+\theta)DG(t_0+\theta)y(y_0,t_0;t_0+\theta)d\theta\,. \quad (2)$$

Здесь $D-$положительно определенная симметрическая $n\times n-$матрица, $G(t)=\exp\{-A_1\tau(t)\}$, $\tau(t)=t-\mathrm{entier}[t/h]h$.

Следует отметить, что для решений системы (1) на интервале $0\le t<t_f-T_1$, $T_1>0$, справедливы экспоненциальные оценки роста и, следовательно, неравенства [4]

$$V(y_0,t_0)\le\mu_1\|y_0\|^2,\quad \mu_1>0,\quad t_0\in I, \qquad (3)$$

$$\mu_2\|y_0\|^2\le V(y_0,t_0),\quad \mu_2>0,\quad t_0\in\Theta. \qquad (4)$$

Вычислим производную функции $V(y_0,t_0)$ [4] вдоль решения системы (1) - функцию $\dot V(y_0,t_0)$. Для этого понадобится рассмотреть систему первого приближения

$$\dot x=A_1x,\quad t\in I\setminus\Theta,\quad x(t)=A_2x(t-0),\quad t\in I. \qquad (5)$$

Здесь $x\in R^n$, множества Θ, I те же , что и в (1). Итак,

$$\dot V(y_0,t_0)=y_0^TG^T(t_0)[P^TDP-D]G(t_0)y_0+\gamma(y_0,t_0,t_0+h),$$

$$\gamma(y_0,t_0,t_0+h)=[y^T(y_0,t_0;t_0+h)+x^T(y_0,t_0;t_0+h)]G^T(t_0)DG(t_0)[y(y_0,t_0;t_0+ +h)-x(y_0,t_0;t_0+h)].$$

Пусть собственные числа матрицы P лежат внутри окружности единичного радиуса, тогда для любой положительно определенной матрицы C найдется положительно определенная матрица D, удовлетворяющая уравнению

$$P^TDP-D=-C. \qquad (6)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|y(y_0,t_0;t_0+h)-x(y_0,t_0;t_0+h)\|\le\sigma_1\|y_0\|(t_f-t_0-h)^{-1},\quad \sigma_1>0,$$

при $0\le t_0<t_f-T_1$, $T_1>h$. Следовательно, учитывая экспоненциальные оценки роста решений систем (1),(5), получим

$$|\gamma(y_0,t_0,t_0+h)|\le\sigma_2\|y_0\|^2(t_f-t_0-h)^{-1},\quad \sigma_2>0. \qquad (7)$$

Выбирая матрицу D как решение уравнения (6) и учитывая это неравенство, имеем

$$\dot V(y_0,t_0)\le -y_0{}^TG^T(t_0)CG(t_0)y_0+\sigma_2\|y_0\|^2(t_f-t_0-h)^{-1}\le(-\mu_3+$$

$$+\mu(t_f-t_0-h)^{-1})\|y_0\|^2\le\mu_1{}^{-1}(-\mu_3+\mu(t_f-t_0-h)^{-1})V(y_0,t_0)$$

при $0\le t_0<t_f-T_2$, $T_2=h+\max\{\mu/\mu_3,T_1\}$. Подставим в это выражение вместо y_0 решение $y(y_0',t_0';t)$, а вместо t_0 – значение t. Затем поделив обе части полученного неравенства на $v(t)=V(y(y_0',t_0';t),t)$ и проинтегрировав на интервале $t_0'\le t<t_f-T_2$, полу-

чим $v(t) \le v(t_0')(t_f - t - h)^{\mu}(t_f - t_0' - h)^{-\mu}\exp(-\mu_3(t - t_0'))$. Из [1] известно, что для любых $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ существуют такие $\delta > 0$, $t_{f\min} > 0$, что при $t_f > t_{f\min}$, $t_0' \le t < t_f - T_2$ выполняется неравенство $(t_f - t - h)^{-\mu}(t_f - t_0' - h)^{\mu}\exp(-\varepsilon(t - t_0')) \le \delta$. Тогда с учетом неравенства (4) получим $\|y(y_0', t_0'; t)\|^2 \le \|y_0'\|^2 \mu_2^{-1}\mu_1\delta\exp(-\alpha_1(t - t_0'))$, $\alpha_1 = \mu_3 - \varepsilon > 0$, в точках $t \in \Theta \cap [t_0', t_f - T_2]$. Решения же системы (1) в промежутках между значениями $t \in \Theta$ на интервале $t_0' \le t < t_f - T_2$ имеют экспоненциальную оценку роста, которая не зависит от величины t_f. Отсюда следует, что при $t_f \to \infty$ решение системы (1) на интервале $T_1' \le t_f - t \le T_2'$, $T_1', T_2' > 0$ стремится к нулю, следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость.

Пусть хотя бы одно собственное число матрицы P лежит вне окружности единичного радиуса, тогда какова бы ни была определенно положительная матрица C, всегда найдутся матрица D и число α, удовлетворяющие уравнению

$$P^T DP - (1+\alpha)D = (1+\alpha)C. \qquad (8)$$

Вычислим производную функции (2) с матрицей D, являющейся решением уравнения (8), вдоль решения системы (1)

$$\dot{V}(y_0, t_0) = y_0^T G^T(t_0)[P^T DP - (1+\alpha)D]G(t_0)y_0 +$$

$$+\alpha y_0^T G^T(t_0)DG(t_0)y_0 + \gamma(y_0, t_0, t_0 + h).$$

Отсюда, на основе неравенства (7) и с учетом того, что α можно выбрать сколь угодно малым, следует оценка

$$\dot{V}(y_0, t_0) \ge \frac{1}{2} y_0^T G^T(t_0)CG(t_0)y_0 - \sigma_1\|y_0\|^2(t_f - t_0 - h)^{-1} \ge$$

$$(\mu_5 - \mu_6(t_f - t_0 - h)^{-1})\|y_0\|^2 \ge \mu_1^{-1}(\mu_5 - \mu_6(t_f - t_0 - h)^{-1})V(y_0, t_0),$$

где $\mu_5 > 0, \mu_6 > 0, y_0 \in R^n$, $t_0 \le t < t_f - T_3$, $T_3 > 0$. Выберем y_0 так, чтобы $y_0^T D y_0 > 0$. Можно показать, что при достаточно большом t_f выполняется условие $V(y_0, t_0) > 0$. Следовательно, на интервале $t_0 \le t < t_f - T_4$, $T_4 = \max\{\mu_6 / \mu_5, h\}$ функция $v(t) = V(y(y_0, t_0; t), t)$ монотонно возрастает. С учетом неравенства (3) нетрудно заключить, что при $t_f \to \infty$ решение неограниченно растет на интервале $T_1' \le t_f - t \le T_4, T_1' > 0$. Таким образом, система (1) неустойчива. Теорема доказана.

3. Критический случай. Пусть матрица P имеет однократное единичное собственное число. Выполним невырожденное линейное преобразование системы (1)

$$y = M(t)z, \quad M(t) = \exp\{A_1\tau(t)\}N, \quad N^{-1}PN = \mathrm{diag}\{1, P_2\},$$

$$N = [N_1 N_2], \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad N_1 \in R^n, L_1^T \in R^n.$$

Имеем

$$\dot z_1 = q_{11}(t)(t-t_f)^{-1}z_1 + q_{12}(t)(t-t_f)^{-1}z_2,$$
$$\dot z_2 = q_{21}(t)(t-t_f)^{-1}z_1 + q_{22}(t)(t-t_f)^{-1}z_2, \qquad (9)$$
$$z_1(t) = z_1(t-0) + p_{11}(t-t_f)^{-1}z_1(t-0) + p_{12}(t-t_f)^{-1}z_2(t-0),$$
$$z_2(t) = P_2 z_2(t-0) + p_{21}(t-t_f)^{-1}z_1(t-0) + p_{22}(t-t_f)^{-1}z_2(t-0). \qquad (10)$$

Здесь $q_{ij} = L_i \exp\{-A_1\tau(t)\} b_1 d_1^T \exp\{A_1\tau(t)\} N_j$; $p_{ij} = L_j b_2 d_2^T \exp\{A_1 h\} N_j$; $i,j = 1,2$; $z_1 \in R$, $z_2 \in R^{n-1}$, $P_2 \in R^{(n-1)\times(n-1)}$. Система первого приближения (5) в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\dot x_1 = 0, \quad \dot x_2 = 0, \quad t \in I \setminus \Theta; \quad x_1(t) = x_1(t-0), \quad x_2(t) = P_2 x_2(t-0), \quad t \in \Theta.$$

Теорема 2. Пусть одно собственное число матрицы $P = A_2 \exp(A_1 h)$ равно единице, а остальные лежат внутри окружности единичного радиуса. Обозначим

$$\rho(t,t_f) = \exp\left\{\int_t^{t+h} q_{11}(\theta)(\theta - t_f)^{-1} d\theta\right\}(1 + p_{11}(t_f - t - h + \tau(t))^{-1}).$$

Тогда, если выполняется условие $\rho(t,t_f) \le 1 - \varepsilon(t_f - t - h)^{-1}$ при $t_0 < t < t_f - T_1$, $T_1 > h$, $t_{min} \le t_f < \infty$, решения системы (1) асимптотически устойчивы; если выполняется условие $\rho(t,t_f) \ge 1 + \varepsilon(t_f - t - h)^{-1}$, решения неустойчивы.

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(z_0,t_0) = \int_0^h z_2^T(z_0,t_0;t_0+\theta) D z_2(z_0,t_0;t_0+\theta) d\theta \quad + \quad \int_0^h z_1^2(z_0,t_0;t_0+\theta) d\theta,$$

где матрица D - положительно определенное решение уравнения (6) для заданной положительно определенней матрицы C. Можно показать, что для функции $V(z_0,t_0)$ справедливы неравенства вида (3), (4). Вычислив производную $\dot V(z_0,t_0)$ функции $V(z_0,t_0)$ вдоль решения системы (9),(10) в точке z,t, получим $\dot V(z,t) = z_2^T(z,t;t+h) D z_2(z,t;t+h) - z_2^T D z_2 + z_1^T(z,t;t+h) - z_1^2$. Пусть выполняется неравенство $\rho(t,t_f) \le 1 - \varepsilon(t_f - t - h)^{-1}$. Выполняя оценки в правой части полученного соотношения с использованием системы первого приближения и учитывая неравенство

$z_1^2(z,t;t+h) \le \rho(t,t_f) z_1^2 + k_2 |z_1| \, \|z_2\| (t - t_f - h)^{-1} + k_3 \|z\|^2 (t - t_f - h)^{-2}$, получаем $\dot V(z,t) \le (-k(t_f - t - h)^{-1} + k_4(t_f - t - h)^{-2}) V(z,t)$ при $t_0 < t < t_f - T_3$, $T_3 = h + k / k_4$. Рассмотрим это неравенство вдоль решения системы (9), (10). Поделив обе его части на $v(t) = V(z(z_0,t_0;t),t)$ и проинтегрировав на интервале $t_0 \le t < t_f - T_3$, получим $v(t) \le v(t_0) k_5 (t_f - t - h)^k (t_f - t_0)^{-k}, k_5 > 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\|z(z_0,t_0;t)\|^2 \le \|z_0\|^2 k_5 \mu_1 \mu_2^{-1} (t_f - t - h)^k (t_f - t_0)^{-k}$ при $t \in \Theta \bigcap [t_0, t_f - T_3]$. Следовательно, решения системы (1) при $t_f \to \infty$ на интервале $T_1' \le t_f - t \le T_2'$, $T_1', T_2' > 0$ стремятся к нулю, т.е. система (1) асимптотически устойчива.

Пусть выполняется неравенство $\rho(t,t_f) > 1+\varepsilon(t_f - t - h)^{-1}$. Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(z_0,t_0) = -\int_0^h z_2^T(z_0,t_0;t_0+\theta)Dz_2(z_0,t_0;t_0+\theta)d\theta \quad + \quad \int_0^h z_1^2(z_0,t_0;t_0+\theta)d\theta,$$

где матрица D является положительно определенным решением уравнения (6) для заданной положительно определенней матрицы C. Вычислим производную $\dot{V}(z_0,t_0)$ вдоль решения системы (9),(10)

$$-\dot{V}(z,t) = z_2^T(z,t;t+h)Dz_2(z,t;t+h) - z_2^T D z_2 - z_1^T(z,t;t+h) + z_1^2.$$

Далее, выполняя оценки аналогичные рассмотренным ранее, получаем $\dot{V}(z,t) \ge (k(t_f - t - h)^{-1} - k_4(t_f - t - h)^{-2})\mu_1^{-1}V(z,t) \ge k/2(t_f - t - h)^{-1}V(z,t) > 0$ при $t_0 \le t \le t_f - T_3$, $T_3 = 2k_4/k + h$. Если выбрать $z_0 = \{z_{10}, 0\}^T$, $z_{10} \in R, z_{10} > 0$, то можно показать, что при достаточно большом t_f выполняется неравенство $v(t_0) = V(z_0,t_0) > 0$ и, следовательно, функция $v(t) = V(z(z_0,t_0;t),t)$ монотонно возрастает. Значит, в силу неравенства (3), растет и решение. Отсюда нетрудно сделать вывод о неустойчивости системы (1). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи. Пусть матрица $A_2 = E$, где E - единичная матрица, а векторы $b_2 = 0$, $d_2 = 0$. В этом случае система (1) является непрерывной, матрица $P = \exp\{A_1 h\}$. Если одно собственное число матрицы P равно единице, а остальные по модулю меньше единицы, то соответственно, одно собственное число матрицы A_1 равно нулю, а остальные лежат в левой полуплоскости. Известно [1], что устойчивость системы в этом случае определяется знаком вычета в нуле определяющей передаточной функции $\gamma_0 = \lim_{s\to 0} s d_1^T [sE - A_1]^{-1} b_1$. Покажем, что коэффициент системы (9) $q_{11}(t) = \gamma_0$. Действительно, можно записать [5]

$$[sE - A_1]^{-1} = [Es^{n-1} + B_1 s^{n-2} + \ldots + B_{n-1}](s^n - p_1 s^{n-1} - \ldots - p_n)^{-1},$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ - вещественные $n\times n$ – матрицы. Подставляя это представление в формулу, определяющую вычет, и переходя к пределу, получим

$$\lim_{s\to 0} s d_1^T [sE - A_1]^{-1} b_1 = d_1^T [B_{n-1}(-p_{n-1})^{-1}] b_1.$$

Для матрицы B_{n-1} выполняются соотношения $AB_{n-1} = 0$, $B_{n-1}A = 0$. Отсюда следует, что столбцы матрицы B_{n-1} являются правыми, а строки - левыми собственными векторами матрицы A_1, соответствующими нулевому собственному числу. Можно показать, используя формулы для линейного преобразования системы (9),(10), что матрица B_{n-1} представима в виде $B_{n-1} = kN_1L_1$, где k - вещественное число. Вычислим след матрицы B_{n-1}

$$tr(B_{n-1}) = tr[A^{n-1} - p_1 A^{n-2} - \ldots - p_{n-2}A - p_{n-1} - p_{n-1}E] = -p_{n-1}.$$

Но, так как $tr(N_1L_1) = L_1N_1 = 1$, то $k = -p_{n-1}$ и, следовательно, $B_{n-1}(-p_{n-1})^{-1} = N_1L_1$, $\gamma_0 = d_1^T N_1 L_1 b_1$. С другой стороны, в рассматриваемом случае $q_{11} = L_1 \exp\{-A_1\tau(t)\} b_1 d_1^T \exp\{A_1\tau(t)\} N_1 = d_1^T N_1 L_1 b_1$ и, следовательно,

$\gamma_0 = q_{11}$. Можно показать, что если $\gamma_0 > 0$, то $\rho(t, t_f) = (1 - h(t_f - t)^{-1})^{\gamma_0} \le 1 - \varepsilon(t_f - t)^{-1}$ при $\varepsilon = \gamma_0 h$. Кроме того, при $\gamma_0 < 0$ $\rho(t, t_f) \ge 1 + \varepsilon(t_f - t)^{-1}$, где $\varepsilon = -\gamma_0 h$.

Таким образом, полученный критерий устойчивости в рассмотренном частном случае совпадает с ранее известным [1]. Такой же результат нетрудно получить для дискретной системы, то есть при $A_1 = 0, b_1 = 0, d_1 = 0$.

Список использованной литературы

1. Барабанов А.Т. Теория линейных нестационарных систем с особой точкой. Устойчивость систем//Автоматика и телемеханика. - 1969. - №6.- С. 5-16.

2. Кузнецов В.М., Скороход Б.А. О применении функций Ляпунова к анализу асимптотических свойств систем управления конечным положением//Кибернетика на морском транспорте. - 1983. - Вып. 12. - С. 28-37.

3. Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С. Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды.- М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1989. - 272 с.

4. Барабанов А.Т., Старожилов Е.Ф. Исследование устойчивости непрерывно-дискретных систем вторым методом Ляпунова //Автоматика - 1988. - №6. - С. 33-38.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М: Наука, 1988. - 548 с.