

УДК 539.3

Л. Е. АВРАМЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Донецкий гос. ун-т  
В. П. ШЕВЧЕНКО, докт. физ.-мат. наук, акад. НАН Украины,  
Донецкий гос. ун-т

## ТЕРМОУПРУГОСТЬ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА.

Решена задача термоупругости для тонкой пологой сферической оболочки при действии движущегося по поверхности оболочки сосредоточенного источника тепла, а также задача теплопроводности при действии локального источника тепла. Предполагалось линейное распределение температуры по толщине оболочки и конвективный теплообмен по закону Ньютона с ее боковых поверхностей. С помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа получено решение в аналитическом виде. Исследована зависимость распределения температурного поля и компонент напряженно-деформированного состояния оболочки от времени, скорости движения, а также от формы источника тепла.

Динамические задачи теплопроводности и термоупругости для пластин рассматривались в работах [1,2]. Распределение температурного поля и компонент напряженно-деформированного состояния оболочки при действии неподвижных источников тепла рассматривалось в статьях [3,4]. Задача теплопроводности при действии движущегося сосредоточенного источника тепла – в работе [5]. В данной статье рассмотрены задача термоупругости для сферической оболочки при действии движущегося по закону

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau) \quad (1)$$

сосредоточенного источника тепла и задача теплопроводности при действии движущегося локального источника тепла.

Уравнения теплопроводности [6] в безразмерных координатах  $x' = x/h$ ,  $y' = y/h$ ,  $z' = z/h$ ,  $\tau' = \tau a/h^2$ ,  $t'_1 = t_1/t_1^0$ ,  $t'_2 = t_2/t_2^0$  примут вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_2^* T_2 - \partial T_1 / \partial \tau' &= -(\mu_1 t'_1 + \mu_2 t'_2); \\ \nabla^2 T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2^* T_1 - \partial T_2 / \partial \tau' &= -3(\mu_1 t'_2 + \mu_2 t'_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\mu_{1,2} = (B_i^+ \pm B_i^-)/2$ ;  $\mu_2^* = \mu_2 - 1/R$ ;  $t_{1,2} = (t_c^+ \pm t_c^-)/2$ ;  $T_{1,2}$  - интегральные характеристики температурного поля;  $B_i^\pm$  и  $t_c^\pm$  - критерий Био и температура среды на поверхности  $z' = \pm 1$ ;  $R$  - радиус кривизны оболочки,  $\nabla^2$  - оператор Лапласа.

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки система (2) дополняется уравнениями равновесия [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x'} &= \alpha_0(1+\nu) \frac{\partial T_1}{\partial x'}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x'} &= \alpha_0(1+\nu) \frac{\partial T_1}{\partial y'}; \\ \nabla^4 w + \frac{6(1+\nu)}{R} w + \frac{3(1+\nu)}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) &= \frac{6(1+\nu)}{R} \alpha_0 T_1 - \alpha_0(1+\nu) T_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u, v, w$  - перемещения в направлении осей координат  $x', y', z'$ ;  $\alpha_0$  и  $\nu$  - соответственно коэффициенты линейного расширения и Пуассона.

Если на оболочку действует сосредоточенный источник температуры, то в (2) следует подставить  $t'_1 = \delta(x' - x'(\tau'), y' - y'(\tau')) S_+[\tau']$ ,  $t'_2 = 0$ ; а, если сосредоточенный температурный момент, тогда  $t'_1 = 0$ ;  $t'_2 = \delta(x' - x'(\tau'), y' - y'(\tau')) S_+[\tau']$ , где  $S_+[\tau'] = \begin{cases} 1, \tau' > 0; \\ 0, \tau' \leq 0. \end{cases}$

Применяя к уравнениям (2) и (3) преобразования Фурье по  $(x', y')$  и Лапласа по  $\tau'$  приходим к системе линейных алгебраических уравнений, после решения, которой получаем выражения трансформант для компонент температурного поля и напряженно-деформированного состояния оболочки. Приведем некоторые из них

$$T_{1,2}^{=0j} = \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \frac{f_{1,2}^{=0j}(\xi, \zeta, s)}{\xi^2 + \zeta^2 + s + a_i^2}; \quad (4)$$

$$w^{=0j} = k^4 R \alpha_0 T_1^{=0j} \frac{1}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} + (1+\nu) \alpha_0 T_2^{=0j} \frac{(\xi^2 + \zeta^2)^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4}; \quad (5)$$

$$\text{где } f_i^{=0j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \delta(x' - x'(\tau'), y' - y'(\tau')) \delta_{ij} e^{-s\tau' + i(\xi x' + \zeta y')} dx' dy' ds, \quad (6)$$

$a_i^2 = \frac{1}{2h} \left\{ 3 + 4\mu_1 \pm \sqrt{(3 + 2\mu_1) + 12(\mu_2^*)^2} \right\}$ ,  $\delta_{ij}$  - символ Кронеккера,  $k, b_i$  - величины, приведенные в [3].

Применяя к выражениям для усилий, моментов и перерезывающих сил из [3] преобразования Фурье и Лапласа, получаем.

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{N}}_{1,2}^{0j} &= -2E\alpha_0 \overline{\overline{T}}_1^{0j} \frac{\begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \xi^2 \end{pmatrix} (\xi^2 + \zeta^2)}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} + \frac{2E\alpha_0(1+\nu)}{R} \overline{\overline{T}}_2^{0j} \frac{\begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \xi^2 \end{pmatrix}}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4}; \\
 \overline{\overline{S}}^{0j} &= 2E\alpha_0 \overline{\overline{T}}_1^{0j} \frac{\xi\zeta(\xi^2 + \zeta^2)}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} - \frac{2E\alpha_0(1+\nu)}{R} \overline{\overline{T}}_2^{0j} \frac{\xi\zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4}; \\
 \overline{\overline{M}}_{1,2}^{0j} &= \frac{2E\alpha_0}{R} \overline{\overline{T}}_1^{0j} \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \nu \end{pmatrix} \xi^2 + \begin{pmatrix} \nu \\ 1 \end{pmatrix} \zeta^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} - \frac{2E\alpha_0}{3} \overline{\overline{T}}_2^{0j} \frac{\begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \xi^2 \end{pmatrix} (\xi^2 + \zeta^2) + \frac{k^4}{1-\nu}}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4}; \\
 \overline{\overline{H}}^{0j} &= \frac{2E\alpha_0(1-\nu)}{R} \overline{\overline{T}}_1^{0j} \frac{\xi\zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} + \frac{2E\alpha_0}{3} \overline{\overline{T}}_2^{0j} \frac{\xi\zeta(\xi^2 + \zeta^2)}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4}; \\
 \overline{\overline{Q}}_{1,2}^{0j} &= -\frac{2E\alpha_0}{R} \overline{\overline{T}}_1^{0j} \frac{\begin{pmatrix} i\xi \\ i\zeta \end{pmatrix} (\xi^2 + \zeta^2)}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} + \frac{2E\alpha_0(1+\nu)}{R^2} \overline{\overline{T}}_2^{0j} \frac{\begin{pmatrix} i\xi \\ i\zeta \end{pmatrix}}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4};
 \end{aligned} \tag{7}$$

Применяя к (4) - (7) формулы обращения для преобразований Фурье и Лапласа, находим выражения для оригиналов исходных функций. Решение задачи теплопроводности получено в [3] и имеет вид

$$\begin{aligned}
 T_{1,2}^{0j} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \int_0^{\tau'} \exp\left(-\tau_0 a_i^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2}{4\tau_0} \right) d\tau_0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Методику вычисления оригиналов компонент напряженно-деформированного состояния оболочки покажем на примере  $w^{0j}$ .

$$\begin{aligned}
 w^{0j} &= \frac{k^4 R \alpha_0}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 b_i \int_0^{\tau'} f_1^{-0j}(\xi, \zeta, \tau' - \tau_0) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\tau_0(\xi^2 + \zeta^2 + a_i^2)) \exp(-i(\xi x' + \zeta y')) d\xi d\zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} d\tau_0 + \\
 &+ \frac{(1+\nu)\alpha_0}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \int_0^{\tau'} f_2^{-0j}(\xi, \zeta, \tau' - \tau_0) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi^2 + \zeta^2) \exp(-\tau_0(\xi^2 + \zeta^2 + a_i^2)) \exp(-i(\xi x' + \zeta y')) d\xi d\zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} d\tau_0.
 \end{aligned}$$

Учитывая четность подынтегральной функции и значения интегралов [7], находим

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\tau_0(\xi^2 + \zeta^2 + a_i^2)) \exp(-i(\xi x' + \zeta y')) d\xi d\zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2 + k^4} = \\
 &= -\frac{\pi}{k^2} \operatorname{Im} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(rk\sqrt{i}/2)^{2l}}{l!} (ik\tau_0)^{-\frac{l+1}{2}} \exp(-a_i^2\tau_0 + ik^2\tau_0/2) \times W_{\frac{l+1}{2}, \frac{l}{2}}(ik\tau_0),
 \end{aligned}$$

где  $r^2 = (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2$ ,  $W_{\lambda, \mu}(z)$  - функция Уиттекера.

Из свойств  $\delta$ -функции и формулы свертки для преобразования Фурье, получаем

$$w^{0j} = \frac{k^4 R \alpha_0}{4\pi} \sum_{i=1}^2 b_i \operatorname{Im} GW - \frac{(1+\nu)\alpha_0}{4\pi} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \operatorname{Re} GW, \quad (9)$$

здесь

$$\begin{aligned}
 GW &= - \int_0^{\tau'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(rk\sqrt{i}/2)^{2l}}{l!} (ik\tau_0)^{-\frac{l+1}{2}} \times \\
 &\times \exp(-a_i^2\tau_0 + ik^2\tau_0/2) \times W_{\frac{l+1}{2}, \frac{l}{2}}(ik\tau_0) d\tau_0,
 \end{aligned} \quad (10)$$

Если положить в (9) – (10)  $x'(\tau') = 0$ ,  $y'(\tau') = 0$ ,  $\tau' \rightarrow \infty$ , получим решение задачи о стационарном сосредоточенном нагреве оболочки [3].

Рассмотрим случай, когда источник тепла движется вдоль оси  $x'$  с постоянной скоростью  $v'$ . Положим в (1)  $x(\tau) = v\tau$ ,  $y(\tau) = 0$ . Введем подвижную систему координат  $x'_1 = x' - v'\tau'$ ,  $y'_1 = y'$ , где  $v' = v'h/a$ . Тогда, используя значения интегралов [7] и свойства  $\delta$ -функции, находим

$$GW = \tau' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(rk\sqrt{i}/2)^{2l}}{l!l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left( \frac{2v'\tau'|x'|}{r^2} \right)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left( \frac{v'\tau'}{2|x'|} \right)^s m_0, \quad (11)$$

где

$$m_j = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ik^2\tau'}{m!} \left[ \ln(ik\tau') + c + \frac{1}{2} - \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \right] \frac{\gamma(m+s+k+1, a_i^2\tau')}{(a_i^2\tau')^{m+s+k+1}} -$$

$$- \sum_{m=0}^{l+j-1} \frac{(l+j-m+1)!}{(-ik^2\tau')^{l+j-m}} \times (a_i^2\tau')^{l+j-m-k-s-1} \times$$

$$\times \begin{cases} \gamma(m+s+k-l-j+1, a_i^2\tau'), & m+s+k-l-j+1 \geq 0; \\ \frac{(-1)^{l+j-m-s-k-1}}{(l+j-m-s-k-1)!} [E_i(a_i^2\tau') - c - (\exp(-a_i^2\tau')) \ln(a_i^2\tau')], & m+s+k-l-j+1 < 0. \end{cases}$$

Здесь  $\gamma(\alpha, x)$  - неполная гамма - функция,  $E_i(x)$  - интегральная показательная функция.

Аналогичным образом находим оригиналы всех проекций компонент напряженно - деформированного состояния оболочки. Приведем выражения для  $N_{1,2}^{0j}(x', y', \tau')$ .

$$N_{1,2}^{0j} = -\frac{E\alpha_0}{4\pi} \sum_{i=1}^2 b_i \operatorname{Re} GN_{1,2} - \frac{(1+\nu)E\alpha_0}{4\pi k^2 R} \sum_{i=1}^2 b_{i+2} \operatorname{Im} GN_{1,2}, \quad (12)$$

где

$$GN_{1,2} = e^{-\frac{x_1'v'}{2}} e^{-\frac{r_1'^2}{4\tau'}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\tau'(a_i^2 - v'^2/4))^l}{l!} \left( \frac{r_1'^2}{4\tau'} \right)^{\frac{l-1}{2}} W_{-\frac{l+1}{2}, \frac{l}{2}} \left( \frac{r_1'^2}{4\tau'} \right) +$$

$$+ ik^2\tau' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(rk\sqrt{i}/2)^{2l}}{l!l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left( \frac{2v'\tau'|x'|}{r^2} \right)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left( \frac{v'\tau'}{2|x'|} \right)^s m_0 \mp$$

$$\mp ik^2\tau' \cos(2\varphi) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(rk\sqrt{i}/2)^{2(l+1)}}{l!l!} \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} \left( \frac{2v'\tau'|x'|}{r^2} \right)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left( \frac{v'\tau'}{2|x'|} \right)^s m_2.$$

Пусть на оболочку действует локальный источник тепла, тепловой поток которого распределяется по закону  $t_1' = e^{-k_0 r^2(\tau')} S_+[\tau']$ ,  $t_2' = 0$ , где  $k_0$  - коэффициент сосредоточенности теплового потока. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\begin{aligned} f_i^{=0j} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-k_0((x' - x'(\tau'))^2 + (y' - y'(\tau'))^2)) \times \\ &\times \exp(-s\tau' + i(\xi x' + \zeta y')) dx' dy' ds ; \end{aligned}$$

Применяя теорему о свертке и используя значения интегралов [7], находим

$$T_{1,2}^{0j} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \int_0^{\tau'} \frac{\exp\left(-\tau_0 a_i^2 - k_0 \frac{(x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2}{4\tau_0 k_0 + 1}\right)}{(4\tau_0 k_0 + 1)} d\tau_0. \quad (13)$$

При  $x'(\tau')=0, y'(\tau')=0, \tau' \rightarrow \infty$  получаем решение для стационарной задачи при неподвижном локальном нагреве оболочки [4].

Предположим, что источник движется вдоль оси  $x'$  с постоянной скоростью  $v'$ , тогда

$$T_{1,2}^{0j} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \int_0^{\tau'} \frac{\exp\left(-\tau_0 a_i^2 - k_0 \frac{(x'_1 + v'\tau_0)^2 + (y'_1)^2}{4\tau_0 k_0 + 1}\right)}{(4\tau_0 k_0 + 1)} d\tau_0. \quad (14)$$

Используя значения интегралов [7], получаем

$$\begin{aligned} T_{1,2}^{0j} &= \tau' \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-k_0(x_1'^2 + y_1'^2))^l}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left(\frac{2x_1'v'\tau'}{x_1'^2 + y_1'^2}\right)^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left(\frac{v'\tau'}{2x_1'}\right)^s \times \\ &\times B(k+s+1,1) \Phi_1(k+s+1, l+1, k+s+2; (-4k_0\tau'), (-a_i^2/\tau')) \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $B(\lambda, \mu)$  - бэта функция,  $\Phi_1(\nu, \mu, \lambda; x, y)$  - вырожденные гипергеометрические ряды.

На рис. 1 представлены графики изменения  $N_1$  (сплошная линия) и  $N_2$  (штриховая линия) для сферической оболочки в зависимости от скорости движения сосредоточенного источника. На рис. 2 представлены графики распределения температуры в зависимости от изменения скорости движения источника тепла и коэффициента сосредоточенности теплового потока. Кривые 1, 2, 3 показывают распределение температуры при сосредоточенном нагреве, 4, 5, 6 - при локальном нагреве оболочки. Из рисунков видно, что распределение

усилий и температуры зависит как от скорости движения источника тепла, так и от его формы. Максимальные значения усилий и температуры – в точке приложения источника тепла. Для сосредоточенного источника тепла они стремятся к бесконечности, для локального источника эти значения конечны.

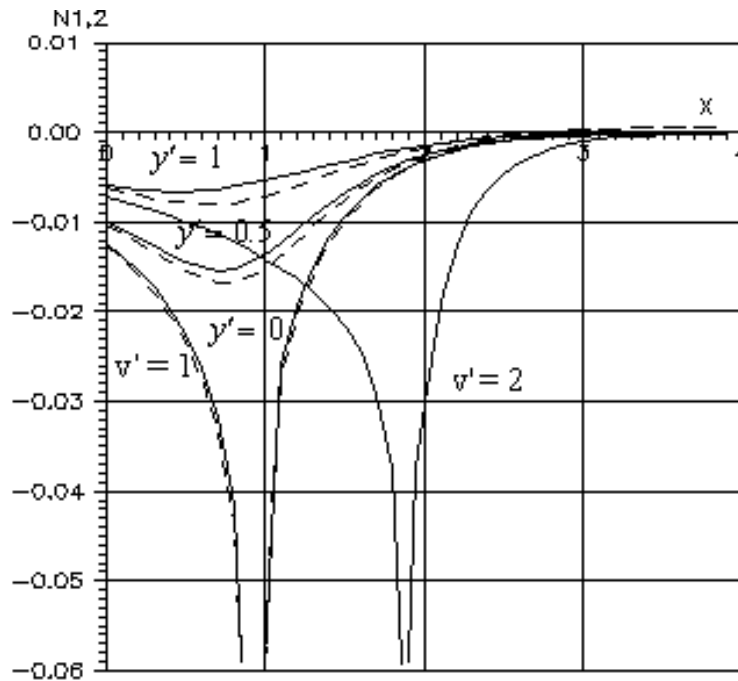


Рис. 1

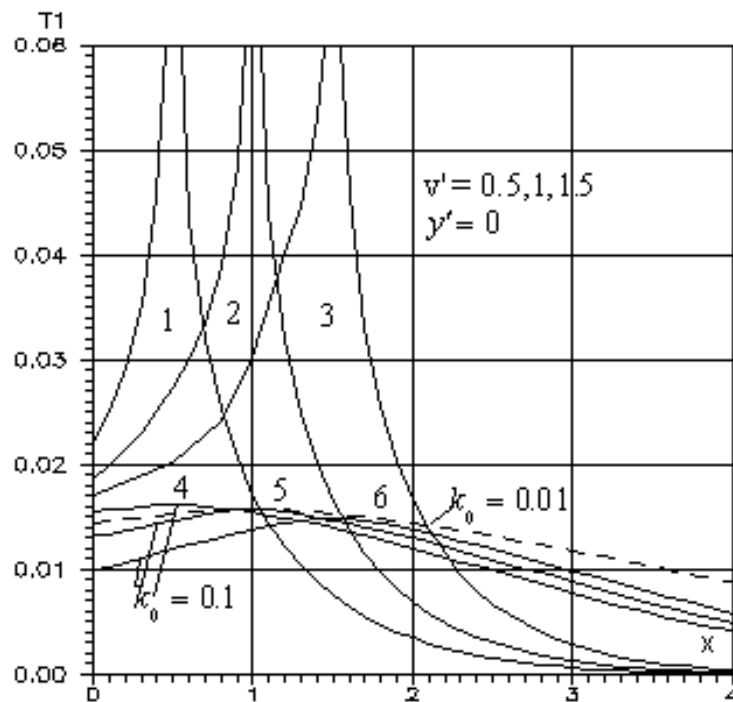


Рис. 2

Расчеты проводились для  $B_i^\pm = 0.1, R = 50$ . При  $k_0 = 0, \tau' \rightarrow \infty$  графики совпадают с графиками, приведенными в [4] для неподвижного сосредоточенного источника тепла.

#### **Список использованной литературы**

1. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1975.– 302 с.
2. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. Температурные напряжения от объемных источников.– К.: Наук. Думка, 1983. -288 с.
3. Авраменко Л. Е., Шевченко В. П. Напряженно-де-формированное состояние оболочек под действием сосредоточенных источников тепла // Теор. и прикл. мех. 1995.– Вып. 25, – С. 70-80.
4. Авраменко Л. Е., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки под действием распределенного источника тепла // Теор. и прикл. мех. 1996. – Вып. 26. – С. 69-75.
5. Авраменко Л. Е., Шевченко В. П. Теплопроводность тонких оболочек под действием движущегося сосредоточенного источника тепла // Труды межд. Конф. «Современные проблемы концентрации напряжений», 1998.– С. 17-20.
6. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.– К.. Наук. думка, 1978.– 343с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М. Мир, 1971.– 1108с.

Поступила в редколлегию 23.04.99