# КОЛЕБАНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 62.50

А. Т. БАРАБАНОВ, д. т. н., Севастоп. гос. техн. ун-т

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ.

На основе полиномиальной формы частотного условия абсолютной устойчивости (неравенства В.М. Попова) получены новые, алгебраические критерии абсолютной устойчивости. Анализ неравенства сводится к анализу локальных свойств многочленов и рациональной функции на вещественной отрицательной полуоси. Благодаря этому критерии устойчивости не требуют построения каких-либо кривых и могут быть выражены на основе алгоритмов типа Рауса-Гурвица и вычисления вещественных отрицательных корней многочленов.

**1. Постановка задачи.** Будем рассматривать частотное неравенство В. М. Попова [1]

$$\operatorname{Re}(1+\theta j\omega)W(j\omega)+\frac{1}{k}>0,\quad j^2=-1 \tag{1.1}$$

при заданном коэффициенте $k>0$ (сектор нелинейности) и заданной передаточной функции линейной части системы

$$W(s)=p(s)/q(s),$$

$$p(s)=b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m,\quad q(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n,$$

$$\text{где}\quad \theta\in R^1,\ a_0\neq 0,\ b_0\neq 0,\ b_m\neq 0,\ n>m.$$

Для частотных характеристик $P(\omega)=\operatorname{Re}W(j\omega)$, $Q(\omega)=$ $=\operatorname{Im}W(j\omega)$ воспользуемся представлениями

$$P(\omega)=\frac{1}{2}[W(j\omega)+W(-j\omega)],\qquad Q(\omega)=\frac{1}{2j}[W(j\omega)-W(-j\omega)],$$

из которых следует

$$P(\omega)=A(x)/D(x),\ \omega Q(\omega)=B(x)/D(x),\ x=-\omega^2, \tag{1.2}$$

$$A(s^2)=\frac{1}{2}[p(s)q(-s)+p(-s)q(s)]=\text{чет}\ p(s)q(-s),$$

$$B(s^2)=\frac{1}{2}[(-s)p(s)q(-s)+sp(-s)q(s)]=\text{чет}(-s)p(s)q(-s),$$

 

$$D(s^2)=q(s)q(-s)=\text{чет}\, q(s)q(-s),$$

где $\quad \text{чет}\,(\alpha_0+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2+\ldots)=\alpha_0+\alpha_2 s^2+\ldots$ .

Если записать многочлены $p(s), q(s)$ в виде

$$p(s)=u(s^2)+s\mathrm{v}(s^2),\quad q(s)=U(s^2)+sV(s^2), \tag{1.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &u(x)=b_m+b_{m-2}x+b_{m-4}x^2+\ldots;\ \mathrm{v}(x)=b_{m-1}+b_{m-3}x+b_{m-5}x^2+\ldots;\\ &U(x)=a_n+a_{n-2}x+a_{n-4}x^2+\ldots;\ V(x)=a_{n-1}+a_{n-3}x+a_{n-5}x^2+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

то нетрудно получить

$$\left.\begin{aligned} &A(x)=u(x)U(x)-x\mathrm{v}(x)V(x),\ B(x)=x\left[u(x)V(x)-\mathrm{v}(x)U(x)\right],\\ &D(x)=U^2(x)-xV^2(x).\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Будем различать случаи: основной, когда $b_m\neq 0,\ a_n\neq 0$, и простые критические, а именно, 1. $q(s)=sq_0(s)$ – первый, $a_n=0$, $a_{n-1}\neq 0$ и 2. $q(s)=s^2q_0(s)$ – второй, $a_n=0$, $a_{n-1}=0$, $a_{n-2}\neq 0$. Многочлены $q(s)$ в основном и $q_0(s)$ в критических случаях 1, 2 предполагаются гурвицевыми.

Для критических случаев в теории абсолютной устойчивости рассматриваются условия предельной устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости многочлена $Q(s,\varepsilon)=q(s)+\varepsilon p(s)$ при сколь угодно малом $\varepsilon>0$. Эти условия для рассматриваемых критических случаев имеют вид [1,2]

$$1.\ p(0)q_0(0)=b_m a_{n-1}>0;\ \ 2.\ p(0)q_0(0)=b_m a_{n-2}>0,\ B(-\varepsilon)<0, \tag{1.6}$$

$\varepsilon>0$ и сколь угодно мало.

Заметим, что в силу представлений (1.5), (1.4) для второго критического случая

$$B(x)=x^2(b_m a_{n-3}-b_{m-1}a_{n-2})+\ldots.$$

Поэтому достаточным для выполнения второго неравенства во втором критическом случае будет неравенство $b_m a_{n-3}-b_{m-1}a_{n-2}>0.$

Возвращаясь к неравенству (1.1), запишем его в силу (1.2) в виде

$$\frac{A(x)}{D(x)}-\theta\frac{B(x)}{D(x)}+\frac{1}{k}>0. \tag{1.7}$$

В основном случае неравенство (1.1), а следовательно и равносильное (1.7) рассматриваются при $\omega \geq 0$ и соответственно $x \leq 0$, в критическом – при $\omega > 0$ и $x < 0$.

Определяя многочлен $G(x)$ как

$$G(x) = A(x) + \frac{1}{k} D(x) \tag{1.8}$$

и учитывая, что $D(x) > 0$ в некритическом случае при $x \leq 0$ и в критических случаях при $x < 0$, далее будем рассматривать неравенство

$$\pi(x) = G(x) - \theta B(x) > 0 \tag{1.9}$$

при $x \leq 0$ в основном случае и при $x < 0$ в критических случаях вместе с условиями (1.6) как равносильную полиномиальную форму условия (1.1).

Необходимо ответить на вопрос, существуют ли значения вещественного параметра $\theta$, при которых неравенство (1.9) выполняется? При положительном ответе на этот вопрос следует заключение об абсолютной устойчивости нелинейной системы [1,3].

**Замечание 1.** Пусть $f(x)$ – какой либо многочлен и $\rho^{-}(f)$ – число всех его различных вещественных отрицательных корней. Тогда необходимое и достаточное условие его положительности при $x < 0$ можно записать в виде

$$f(-0) > 0 \quad (\text{или} \ \ f(-\infty) > 0), \qquad \rho^{-}(f) = 0. \tag{1.10}$$

Такой подход к решению проблемы неравенства типа (1.9) предлагается в [4]. Однако поскольку параметр $\theta$ не задан, непосредственное применение каких-либо критериев выполнения (1.10), например, предложенных в [4], возможно лишь в процедуре перебора его значений. В этой процедуре определенным является только положительный исход выбора, когда условие (1.10) для многочлена $\pi(x)$ оказывается выполненным.

**2. Исходные положения.** В силу (1.5), (1.4) при $x \to 0$

$$A(x) = b_m a_n + ..., \ B(x) = x(b_m a_{n-1} - b_{m-1} a_n) + ..., \ D(x) = a_n^2 + ... \tag{2.1}$$

для основного случая и

$$\left.\begin{aligned}
&1. A(x) = (b_m a_{n-2} - b_{m-1} a_{n-1})x + ..., \ B(x) = x b_m a_{n-1} + ..., \\
&2. A(x) = b_m a_{n-2} x + ..., \ B(x) = x^2 (b_m a_{n-3} - b_{m-1} a_{n-2}) + ..., \\
&1. D(x) = -x a_{n-1}^2 + ...; \ \ 2. \ D(x) = a_{n-2}^2 x^2 + ...
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

для первого и второго критических случаев соответственно.

Кроме того, для всех случаев при $x \to -\infty$ имеем

$$A(x) = a_0 b_0 (-1)^n x^{(n+m)/2} + \dots,\ B(x) = (a_1 b_0 - a_0 b_1)(-1)^n x^{(n+m)/2} + \dots, \quad (2.3)$$

$$A(x) = (a_1 b_0 - a_0 b_1)(-1)^{n-1} x^{(n+m-1)/2} + \dots, B(x) = a_0 b_0 (-1)^{n+1} x^{(n+m+1)/2} + \dots \quad (2.4)$$

при $n+m$ – четном, $n+m$ – нечетном соответственно, а также

$$D(x) = a_0^2 (-x)^n + \dots \quad , \quad (2.5)$$

$$G(x) = (-x)^n a_0^2 / k + \dots \quad . \quad (2.6)$$

Рассматривая рациональную функцию

$$R(x) = \frac{G(x)}{B(x)} \quad , \quad (2.7)$$

будем иметь ввиду, что в силу (2.3), (2.4), (2.6)

$$R(-\infty) = \pm\infty , \quad (2.8)$$

$$R(-\infty) = -\frac{a_0}{b_0} \frac{1}{k} \quad (2.9)$$

при $m < n-1,\ m = n-1$ соответственно.

Из соотношения (2.6) следует

$$G(-\infty) > 0 . \quad (2.10)$$

Наш анализ начнем со следующего очевидного утверждения для основного и первого критического случаев.

**Лемма.** Если существует $\theta$, при котором неравенство (1.9) выполняется, то в основном случае ($q(0) \neq 0$)

$$G(0) = b_m a_n + a_n^2 / k > 0; \quad (2.11)$$

для всех различных вещественных отрицательных корней $\beta_i,\ i = 1,2,\dots$, многочлена $B(x)$

$$G(\beta_i) > 0,\ \ i = 1,2,\dots; \quad (2.12)$$

для всех различных вещественных отрицательных корней $\gamma_i, i = 1,2,\dots$, многочлена $G(x)$

$$B(\gamma_i) < 0, i = 1,2,\dots \quad \text{или} \quad B(\gamma_i) > 0,\ \ i = 1,2,\dots . \quad (2.13)$$

Для дальнейшего примем, что $\beta_{i+1} < \beta_i,\ i = 0,1,2,\dots,\ \beta_0 = 0$.

**Замечание 2.** Условие (2.13) выполняется в одном и только в одном из случаев:

1. $B(x)$ в интервале $(-\infty, 0)$ знака не меняет;
2. корни $\gamma_i$, $i = 1,2,...$, распределены по тем интервалам $(\beta_{i+1}, \beta_i)$, $i \in \{1,2,...\}$, в которых $B(x)$ имеет один и тот же знак.

Для удобства формулировок алгебраических критериев выполнения свойств многочленов введем следующие обозначения. Пусть $f(x), h(x)$ – некоторые многочлены. Тогда $\rho^-(f/h^+)$ – число всех различных вещественных отрицательных корней $\xi_i$, $i = 1,2,...$, многочлена $f(x)$, для которых $h(\xi_i) > 0$, $i = 1,2,...$; $\rho^-(f/h^-)$ – число всех различных вещественных отрицательных корней $\xi_i$, $i = 1,2,...$, многочлена $f(x)$, для которых $h(\xi_i) < 0$, $i = 1,2,...$ .

**Замечание 3.** В этих обозначениях и обозначениях замечания 1 условия (2.12), (2.13) леммы можно записать соответственно в виде

$$\rho^-(B/G^+) = \rho^-(B), \tag{2.14}$$

$$\rho^-(G) = \rho^-(G/B^-) \quad \text{или} \quad \rho^-(G) = \rho^-(G/B^+). \tag{2.15}$$

Равенства (2.14), (2.15) могут быть проверены с помощью алгоритмов обобщенного метода Рауса [4].

**3. Алгебраические критерии абсолютной устойчивости.** Рассмотрим вначале основной случай. Пусть $\beta_i$, $i = 1,2,...,s$, – все различные вещественные отрицательные корни многочлена $B(x)$ и $\beta_0 = 0$. Рассмотрим функцию (2.7) при неравенствах (2.10), (2.11), (2.12). В окрестности каждого корня многочлена $B(x)$ функция $R(x)$ неограничена, и в каждом интервале $(\beta_{i+1}, \beta_i)$, $i = 0,1,...,s-1$, неограниченные значения этой функции одного знака. Следовательно, функция имеет экстремальные значения (хотя бы одно) $R_* = R(\xi)$, где $\xi \in (\beta_{i+1}, \beta_i)$ является корнем уравнения $R'(x) = 0$, т.е. корнем многочлена

$$E(x) = G'(x)B(x) - G(x)B'(x). \tag{3.1}$$

Экстремальные значения функция $R(x)$ имеет также в интервале $(-\infty, \beta_s)$ при $m < n-1$ и, возможно, при $m = n-1$.

Введем в рассмотрение критериальные значения функции $R(x)$. К ним отнесем все ее экстремальные значения, определяемые всеми вещественными отрицательными корнями $\xi_i$, $i = 1,2,...$ многочлена $E(x)$, а также в случае $m = n-1$ значение (2.9). Выделим два случая: 1. многочлен $B(x)$ в области $x < 0$ знака не меняет, т.е. либо не имеет вещественных отрицательных корней, либо имеет таковые все только четной кратности; 2. многочлен $B(x)$ меняет знак в области $x < 0$.

**Замечание 4.** В случае 1 при $B(x)>0$, $x<0$ существует наименьшее значение $R^{+}_{\min}$ функции $R(x)$ (т.е. наименьшее из всех критериальных значений), а в случае 1 – $B(x)<0$, $x<0$ – наибольшее значение $R^{-}_{\max}$ функции $R(x)$ (т.е. наибольшее из всех критериальных значений).

В случае 2 в области $X^{+}=\{x<0\,|\,B(x)>0\}$, объединении интервалов положительности многочлена $B(x)$, существует наименьшее значение $R^{+}_{\min}$ функции $R(x)$ (т.е. наименьшее из всех критериальных значений в области $X^{+}$), а в области $X^{-}=\{x<0\,|\,B(x)<0\}$, объединении интервалов отрицательности многочлена $B(x)$, – наибольшее значение $R^{-}_{\max}$ функции $R(x)$ (т.е. наибольшее из всех критериальных значений в области $X^{-}$).

Теперь обратимся к первому критическому случаю. Для него согласно соотношениям (2.2) значение $R(0)$ конечно (поскольку выполняется условие предельной устойчивости $b_m a_{n-1}>0$). В интервале $(\beta_1,0)$ к критериальным значениям функции $R(x)$ отнесем как экстремальные ее значения, так и значение $R(0)$. В остальном все сказанное для основного случая относится и к первому критическому.

Анализ неравенства (1.9) после сказанного выше может быть выполнен алгебраическими методами с помощью следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть рассматривается основной и первый критический случаи и выполнены необходимые условия (2.11), (2.12) для неравенства (1.9). Тогда: 1. Если $B(x)$ не меняет знак при $x<0$, то для выполнения неравенства (1.9) необходимо и достаточно

$$\theta<R^{+}_{\min} \text{ при } B(x)>0,\ x\notin\{\beta_i,\ i=1,2,...\} \tag{3.2}$$

и

$$\theta>R^{-}_{\max} \text{ при } B(x)<0,\ x\notin\{\beta_i,\ i=1,2,...\}; \tag{3.3}$$

2. Если $B(x)$ меняет знак при $x<0$, то для выполнения неравенства (1.9) необходимы и достаточны неравенства

$$R^{-}_{\max}<\theta<R^{+}_{\min}. \tag{3.4}$$

**Доказательство п.1 теоремы.** Пусть $B(x)>0$ при $x<0$, $x\notin\{\beta_i,\ i=1,2,...\}$. Необходимость. Пусть $R^{+}_{\min}$ наименьшее значение функции в области $X^{+}=\{x<0\,|\,B(x)>0\}$ и это значение достигается в точке $x_*$. При $m < n-1$ точка $x_*$ является внутренней точкой интервала $(-\infty,0)$. При $m = n-1$ возможно $x_* = -\infty$, $R^+_{\min} = R(-\infty) = -a_0 / b_0 k$. В том и другом случае соответственно имеем

$$\pi(x_*) = B(x_*)\left[R(x_*) - \theta\right] = B(x_*)\left[R^+_{\min} - \theta\right],$$

$$\pi(x) = B(x)\left[R(x_*) + \varepsilon - \theta\right],$$

где x сколь угодно близко к $x_* = -\infty$ и $\varepsilon \to 0$ при $x \to -\infty$. Отсюда следует необходимость неравенства $\theta < R^+_{\min}$.

Достаточность. Следует из неравенства

$$\pi(x) = B(x)\left[R(x) - \theta\right] \geq B(x)\left[R^+_{\min} - \theta\right]$$

для всяких $x \notin \{\beta_i, i = 1,2,...\}$.

Случай $B(x) < 0$ при $x < 0$, $x \notin \{\beta_i, i = 1,2,...\}$ рассматривается аналогично.

**Замечание 5.** Если многочлен $B(x)$ не имеет отрицательных корней, то условие (2.12) снимается, условие (2.13) выполняется. Необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (1.9) оказывается условие (2.11). Если многочлен $B(x)$ имеет отрицательные корни, но не меняет знак при $x < 0$, то необходимыми и достаточными условиями выполнения неравенства (1.9) оказываются условия (2.11) (в основном случае), (2.12).

**Доказательство п.2 теоремы.** Необходимость. Пусть $m < n-1$ и, следовательно, значения $R^+_{\min}$, $R^-_{\max}$ достигаются при некоторых конечных $x'$ и $x''$ соответственно. Имеем

$$\pi(x') = B(x')\left[R(x') - \theta\right] = B(x')(R^+_{\min} - \theta),$$
$$\pi(x'') = B(x'')\left[R(x'') - \theta\right] = \left|B(x'')\right|(\theta - R^-_{\max}).$$

Если неравенство (1.9) выполняется, то оно выполняется и при указанных значениях $x', x''$. Значит, $R^+_{\min} - \theta > 0$ и $\theta - R^-_{\max} > 0$, т.е. имеет место (3.4).

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (3.4). Тогда для всякого $x$, такого что $B(x) > 0$, имеем $\pi(x) = B(x)\left[R(x) - \theta\right] > B(x)(R^+_{\min} - \theta) > 0.$ Для всякого $x$, такого что $B(x) < 0$, имеем $\pi(x) = B(x)\left[R(x) - \theta\right] > B(x)(R^-_{\max} - \theta) > 0.$
Для значений $x = \beta_i$, $i = 1,2,...$, в силу условия (2.12) неравенство (1.9) также выполняется.

Пусть теперь $m = n-1$ и одним из чисел $R^+_{\min}$, $R^-_{\max}$ оказывается предельное значение $R(-\infty) = -a_0 / b_0 k$. Пусть, например, $R^+_{\min} = R(-\infty)$. Это означает, что при достаточно большом по абсолютной величине $x'$ будем иметь $R(x') = R^+_{\min} + \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$ при $x' \to -\infty$. Тогда $\pi(x') = B(x')[R(x') - \theta] > B(x')(R^+_{\min} + \varepsilon - \theta)$. Для $x''$, такого что $R(x'') = R^-_{\max}$ будем иметь, как и прежде, $\pi(x'') > B(x'')(R^-_{\max} - \theta)$. Отсюда получаем необходимое условие $R^-_{\max} < \theta < R^+_{\min} + \varepsilon$, а из него и неравенство (3.4) поскольку $\varepsilon \to 0$ при $x' \to -\infty$. Достаточность неравенства подтверждается прежним образом. Аналогично рассматривается и случай $R^-_{\max} = R(-\infty)$, а также первый критический случай, когда в качестве значений $R^+_{\min}$, $R^-_{\max}$ выступает значение $R(0)$. Теорема доказана.

**Замечание 6.** Если условие (2.13) не выполняется, то не выполняется и условие (3.4). Если выполняется условие (3.4), то выполняется и условие (2.13).

Действительно, пусть условие (2.13) не выполняется и $\gamma', \gamma''$ корни многочлена $G(x)$, такие что $B(\gamma') > 0,\ B(\gamma'') < 0$. В соответствующих интервалах положительности и отрицательности многочлена $B(x)$ будем иметь для экстремальных значений функции $R(x)$ неравенства $R(\xi') \le R(\gamma') = 0$ и $R(\xi'') \ge R(\gamma'') = 0$. Следовательно, $R^+_{\min} \le R(\xi') \le 0$ и $R^-_{\max} \ge R(\xi'') \ge 0$. Значит неравенство (3.4) не выполняется.

Пусть теперь выполняется неравенство (3.4). Тогда для экстремальных значений функции $R(x)$ в некоторой паре интервалов положительности и отрицательности многочлена $B(x)$ соответственно будем иметь $R(\xi') > R(\xi'')$. Это означает, что в этих интервалах не существуют одновременно корни $\gamma'$ и $\gamma''$ многочлена $G(x)$, т.к. в противном случае последнее неравенство не имело бы места.

Итак, основной и первый критический случай рассмотрены. Обратимся теперь ко второму критическому случаю.

**Замечание 7.** Во втором критическом случае неравенство $\pi(x) = G(x) - \theta B(x) > 0$ не выполняется при всяком конечном $\theta$, т.к. в силу соотношений (2.2) имеем при $x \to -0$ $\pi(x) = = x b_m a_{n-2} + o(x) < 0$, поскольку $b_m a_{n-2} > 0$ по условию предельной устойчивости.

При всяком конечном $x < 0$ оно выполняется при $\theta \to +\infty$ как неравенство $G(x)/\theta - B(x) > 0$ тогда и только тогда, когда

$B(x) < 0,\ x < 0$. Это приводит к условию $B(-\varepsilon) < 0,$ где $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало ( что выполняется по условию предельной устойчивости), и

$$\rho^{-}(B) = 0 .$$

Вместе с условиями предельной устойчивости и условием $\int\limits_{0}^{\pm\infty} \psi(\sigma) = \infty$ получаются достаточные условия абсолютной устойчивости для второго критического случая [1].

**Замечание 8.** Укажем простейшие случаи выполнения условий теоремы. Для сравнения алгебраических свойств соответствующих многочленов со свойствами модифицированного частотного годографа воспользуемся соотношениями $\operatorname{Re} W(j\omega) + 1/k = G(x)/D(x)$, $\omega \operatorname{Im} W(j\omega) = -B(x)/D(x),\ x = -\omega^2$. Пусть в основном случае $G(0) > 0$. Пусть $\rho_i^{-}(f)$ – число всех вещественных отрицательных корней кратности $i$. Неравенство (1.9) выполняется в каждом из случаев: 1. $\rho^{-}(B) = 0;$ 2. $\rho^{-}(B) \neq 0,\ \rho_1^{-}(B) + \rho_3^{-}(B) + ... = 0$ и $\rho^{-}(B/G^{+}) = \rho(B);$ 3. $\rho^{-}(G) = 0;$ 4. $\rho^{-}(G) \neq 0,\ \rho_1^{-}(G) + \rho_3^{-}(G) + ... = 0$ и либо $\rho^{-}(G/B^{+}) = \rho^{-}(G)$, либо $\rho^{-}(G/B^{-}) = \rho^{-}(G)$.

Докажем это утверждение. В случае 1 многочлен $B(x)$ сохраняет знак при $x < 0$ (модифицированный годограф $\operatorname{Re} W^{*}(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega), \operatorname{Im} W^{*}(j\omega) = \omega \operatorname{Im} W(j\omega), 0 \le \omega < \infty$ не пересекает вещественную отрицательную полуось). В случае 2 многочлен $B(x)$ не меняет знак и выполняется условие (2.12) (модифицированный годограф не пересекает вещественную отрицательную полуось, а его точки касания с полуосью расположены справа от точки $(-\frac{1}{k}, 0j)$). В случае 3 многочлен $G(x)$ сохраняет знак при $x < 0$, а т.к. $G(-\infty) > 0$, то $G(x) > 0,\ x < 0$ (модифицированный годограф расположен целиком справа от прямой $\operatorname{Re} W = -1/k$). Условие (2.12) выполняется. При изменении знака $B(x)$ также выполняется условие (3.4) , т.к. одни экстремальные значения $R(\xi) = \dfrac{G(\xi)}{B(\xi)}$ положительны, а другие отрицательны (соответственно при $B(x) > 0$ и $B(x) < 0$).

Наконец, в случае 4 многочлен $G(x)$ не меняет знак, т.е. $G(x) \ge 0,\ x < 0$. В силу третьего условия тогда выполняется и условие (2.12) (модифицированный годограф может пересекать вещественную ось и, располагаясь справа от прямой $\operatorname{Re} W = -1/k$, соприкасается с ней либо в верхней, либо в нижней полуплоскости). Если $B(x)$ меняет знак, то в силу третьего условия также следует, что либо $R^+_{\min}=0, R^-_{\max}<0,$ либо $R^+_{\min}>0, R^-_{\max}=0$. Действительно, пусть, например, $\rho^-(G/B^+)=\rho^-(G)$. Это означает, что для всякого корня $G(x)$ $\gamma_i<0, i=1,2,...$ имеем $B(\gamma_i)>0$. В тех интервалах $(\beta_{k+1},\beta_k)$, где $B(x)>0$ многочлен $G(x)$ может иметь корень и поскольку $G(x)\ge 0$, то и $R(x)\ge 0$. Следовательно, в таких интервалах экстремальные значения $R(\xi)\ge 0$, причем равенство нулю имеет место при наличии корня (четной кратности). В интервалах, где $B(x)<0$, многочлен $G(x)$ корней не имеет. Следовательно, здесь $R(\xi)<0$. В итоге получаем, что $R^+_{\min}=0, R^-_{\max}<0$. Аналогичное рассуждение имеет место и в случае $\rho^-(G/B^-)=\rho^-(G)$.

Таким образом, условия теоремы выполняются во всех четырех указанных случаях.

**Замечание 9.** Пусть рассматриваются многочлены $f(x)$ и $h(x)$. Имеет место следующее утверждение: для того, чтобы имели место равенства (одно из них)

$$\rho^-(f/h^+)=\rho^-(f), \rho^-(f/h^-)=\rho^-(f), \tag{3.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы многочлены $f(x)$ и $h(x)$ не имели общих отрицательных корней и выполнялись соответственно равенства для индекса Коши

$$I^0_{-\infty}h(x)\frac{f'(x)}{f(x)}=\rho^-(f),\ I^0_{-\infty}h(x)\frac{f'(x)}{f(x)}=-\rho^-(f). \tag{3.6}$$

Действительно. В силу определения индекса Коши [5,6]

$$I^0_{-\infty}h(x)\frac{f'(x)}{f(x)}=\rho^-(f/h^+)-\rho^-(f,h^-), \tag{3.7}$$

кроме того очевидно

$$\rho^-(C)+\rho^-(f/h^+)+\rho^-(f/h^-)=\rho^-(f),\ C(x)=НОД\ f(x),h(x). \tag{3.8}$$

Из равенств (3.7), (3.8) следуют равенства

$$2\rho^-(f/h^+)=\rho^-(f)-\rho^-(C)+I^0_{-\infty}h(x)\frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{3.9}$$

$$2\rho^-(f/h^-) = \rho^-(f) - \rho^-(C) - I_{-\infty}^{0}\, h(x)\frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad (3.10)$$

а из них – рассматриваемое утверждение.

**Заключение.** Случаи, отмеченные в замечании 8, могут быть проанализированы с помощью обобщенных алгоритмов Рауса - Гурвица ([4,6,7,8,9]), в основе которых одна и та же основная вычислительная схема. В нее вводятся исходные данные в зависимости от решаемой задачи – в виде двух заданных строк таблицы Рауса или заданной матрицы Гурвица. По элементам соответствующих таблиц Рауса или минорам соответствующих матриц Гурвица могут быть вычислены числа $\rho^-(f),\ \rho_i^-(f),\ i=1,2,...$, значение индекса Коши $I_{-\infty}^{0}\, f(x)/h(x)$ и $C(x) = \text{НОД}\ f(x), h(x)$ для всякой пары многочленов $f(x),\ h(x)$.

В итоге анализ неравенства (1.9) в случаях замечания 8 выполняется сравнительно простой обработкой исходных данных – совокупности коэффициентов многочлена $q(s)$ и многочлена $p(s)$.

В общем случае сохраняется роль обобщенных алгоритмов Рауса-Гурвица в его идентификации и алгебраических схемах анализа, но кроме того возникает, вообще говоря, необходимость определения вещественных отрицательных корней многочленов и соответствующих значений рациональной функции.

Полученные результаты придают локальную форму частотному критерию абсолютной устойчивости.

### Список использованной литературы


1. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. Барабанов А.Т. Аналитическая теория предельной устойчивости // Изв. РАН, Теория и системы управления, 1998, №3, с.15-26.
3. Siljak D.D. Algebraic criterion for absolute stability, optimality and passivity of dynamic systems.- Proc. IEEE (London), 1970,v.117.
4. Барабанов А.Т. Полное решение общей проблемы Рауса в теории систем. II. // Изв. АН СССР.Техн. кибернетика.- 1991.- №2.-с.39-47.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.,1966.
6. Барабанов А.Т. Вычисление индекса рациональной функции на основе обобщенной схемы Рауса // Динам. системы. 1992. Вып.10.-с.69-77.

7. Барабанов А.Т. Гурвицевы формы решения общей проблемы Рауса. III. // Изв РАН. Техн. кибернетика, 1994, №1.- с.3-19.
8. Барабанов А.Т. Регулярные и детерминантные формы представления индекса Коши рациональной функции // Динам. системы. 1992. Вып.11.-с.3-11.
9. Барабанов А.Т. Анализ распределения корней многочлена на основе обобщенной схемы Рауса // Динам. системы. 1994.- Вып.13.-с.107-118.

Поступила в редколлегию 15.03.99

 