УДК 517.977:629.734.7

А. И. БОХОНСКИЙ, д-р техн. наук, проф. Севастоп. гос. техн. ун-т

УПРАВЛЯЕМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Представлена модель управления упругим деформированием твердых тел при медленном изменении положения нагрузки. Поиск условного экстремума критерия качества при ограничении сводится к задаче на безусловный экстремум. Указано на возможные приложения в технике.

В технике актуальны задачи оптимизации напряженно-деформированного состояния и управления упругим деформированием твердых тел и механических систем (машиностроение, робототехника, разворачивание конструкций в космосе) [1, 2, 4, 5].

Рассматриваются задачи управления по медленному движению – при достаточно медленном изменении положения нагрузки на деформируемом теле либо изменении конфигурации механической системы, состоящей из упругих звеньев.

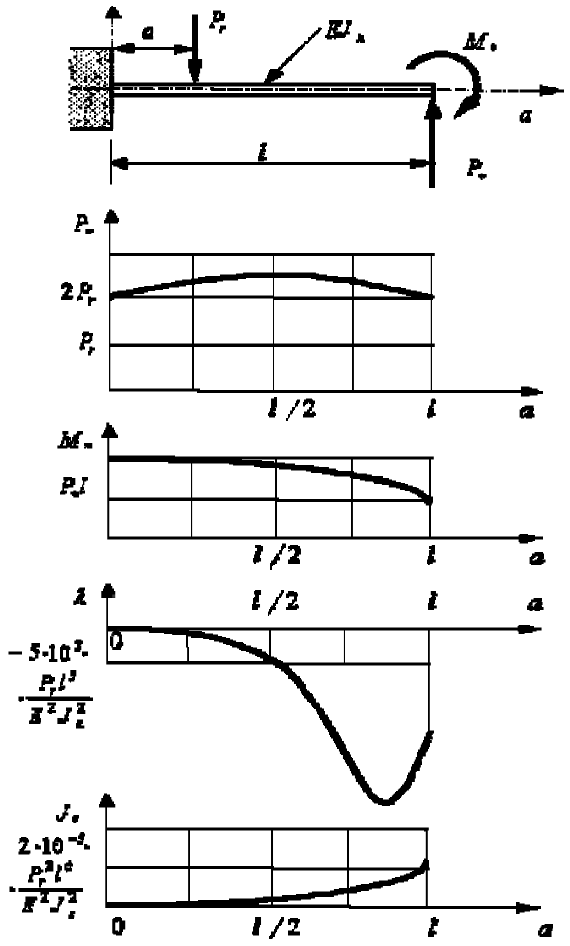

Рис. 1. Схема стержня и графики функций

По сравнению с [1,2,5] в данной статье проведены дальнейшие обобщения в постановке задач управляемого деформирования. При медленном движении внешней нагрузки постановка задачи о поиске управления состоит в следующем. Задано – напряженно-деформированное состояние объекта с учетом внешней нагрузки и подлежащих определению сосредоточенных управляющих силовых воздействий (например, известно выражение для перемещения произвольной точки $W = W(x_k, y_k, z_k, a_{ex}, a_{ey}, a_{ez}, P_{ex}, P_{ey}, P_{ez}, U_j \ldots)$, где x_k, y_k, z_k – координаты точки, a_{ex}, a_{ey}, a_{ez} – координаты внешних сил $(a_{ex} = a_{ex}(t), a_{ey} = a_{ey}(t), a_{ez} = a_{ez}(t))$, $\vec{P}_e$ – внешние медленно перемещающиеся силы (e = 1,2,3,..., г), $\mathrm{U_j}$ – управляющие воздействия в виде сосредоточенных неподвижных сил либо пар сил ($j = 1,\ldots,n$)); задан деформационный критерий качества (критерий оптимальности $J = \mathrm{extr}$.); приняты ограничения в виде равенств $\delta_i(x_k, y_k, z_k, a_{ex}, a_{ey}, a_{ez}, P_{ex}, P_{ey}, P_{ez}, U_j \ldots) = 0$, где $i = 1,2,3,\ldots m$ (в общем случае – ограничения на напряженно-деформированное состояние).

Найти – такие управляющие силовые воздействия (силы либо пары сил U_j, $j = 1,2,\ldots$, при $U \in R^n$) для произвольного положения внешней нагрузки, которые обеспечивают $\mathrm{extr}\ (\min)$ критерия качества с учетом ограничений. По существу решается задача оптимизации деформируемого состояния объекта при непрерывном изменении положения нагрузки.

Внешняя нагрузка представляет собой сосредоточенную силу, пару сил либо комбинацию силы и пары.

Алгоритм поиска управляющих воздействий включает следующие этапы: подстановка выражений для W в критерий J; сведение задачи на условный экстремум к задаче на безусловный – построение функции Лагранжа

$$J_*(\vec{a}, \vec{P}, U, \ldots) = J(\vec{a}, \vec{P}, U, \ldots) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \delta_i(\vec{a}, \vec{P}, U, \ldots); \qquad (1)$$

определение U_j, λ_i из необходимых условий экстремума критерия J_*

$$\frac{\partial J_*}{\partial U_j} = \frac{\partial J}{\partial U_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \delta_i}{\partial U_j} = 0; \qquad j = 1,2,\ldots n; \quad i = 1,2,\ldots m; \qquad (2)$$

проверка достаточных условий минимума критерия J_* (положительной определенности квадратичной формы для второго дифференциала функции)

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 J_*}{\partial U_k\,\partial U_s}\Delta U_k\,\Delta U_s > 0\,,\qquad \delta_i\left(U+\Delta U\right)=0,\quad \forall U\in\delta\left(U\right), \qquad (3)$$

$$i=1,2,\ldots n\,.$$

При численной реализации алгоритма поиска управления проверка достаточных условий экстремума критерия оптимальности сводится к определению собственных значений матрицы коэффициентов квадратичной формы. Управления ищутся аналитически – с привлечением системы аналитических вычислений [3] на ЭВМ и поэтому удобно для проверки положительной определенности квадратичной формы (для критерия качества J_*) использовать матрицу Гэссэ.

Пример 1. По стержню медленно движется сила P_r. Динамические эффекты, возникающие в связи с медленным движением силы P_r, не учитываются. В качестве управляющих силовых воздействий принято: сосредоточенная сила P_* и момент M_* (Рис. 1).

Критерий оптимальности (деформационный критерий качества):

$$J=W^2\left(a\right)+\left[W'\left(a\right)\frac{d}{2}\right]^2=\min\,, \qquad (4)$$

где $W\left(a\right)$, $W'\left(a\right)$ – прогиб и угол поворота сечения стержня (с координатой a) от силовых факторов P_r, P_*, M_*. Критерий качества означает минимум квадрата перемещения точки на поверхности стержня в связи с его изгибом. Выражения для прогиба и угла поворота сечения с координатой a:

$$W\left(a\right)=\left(M_0\,a^2/2+Q_0\,a^3/6\right)/\,EJ\,,\quad W'\left(a\right)=\left(M_0\,a+Q_0\,a^2/2\right)/\,EJ\,, \qquad (5)$$

где $M_0=P_*\,\ell-M_*-P_r\,a$, $\quad Q_0=P_r-P_*$, $\quad EJ$ – жесткость на изгиб.

Изгибающий момент в заделке $M_0=P_r\,a/2$; ограничение

$$F=P_*\ell-M_*-3P_ra/2=0\,. \qquad (6)$$

В данном примере

$$J_*=J+\lambda F=\min,\quad \frac{\partial J_*}{\partial P_*}=0,\quad \frac{\partial J_*}{\partial M_*}=0,\quad \frac{\partial J_*}{\partial \lambda_*}=0. \qquad (7)$$

Необходимые условия (7) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&\left(12a^5 - 36a^4\ell + 18a^3d^2 - 36a^2d^2\ell\right)M_* + \\
&+\left(4a^6 - 24a^5\ell + 9a^4d^2 + 36a^4\ell^2 - 36a^3d^2\ell + 36a^2d^2\ell^2\right)P_* + \\
&+\left(72E^2J_z^2\ell\right)\lambda + \left(8a^6 - 24a^5\ell + 9a^4d^2 - 18a^3d^2\ell + 4a^6\right)P_r = 0; \\
&\left(6a^4 + 6a^2d^2\right)M_* + \left(2a^5 - 6a^4\ell + 3a^3d^2 - 6a^2d^2\ell\right)P_* + \\
&+\left(-12E^2J_z^2\right)\lambda + \left(4a^5 + 3a^2d^2\right)P_r = 0; \\
&-2M_* + 2\ell P_* - 3P_r a = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Решение системы (8) с помощью стандартной подпрограммы SOLVE:

$$
\begin{gathered}
M_* = \frac{P_r\left(-12a^3 + 20a^2\ell - 27ad^2 + 36d^2\ell\right)}{2\left(4a^2 + 9d^2\right)}; \\
P_* = \frac{2P_r\left(5a^2 + 9d^2\right)}{4a^2 + 9d^2}; \quad \lambda = -\frac{P_r a^5 d^2}{4E^2J_z^2\left(4a^2 + 9d^2\right)};
\end{gathered} \tag{9}
$$

Графики функций $M_* = M_*(a), P_* = P_*(a), \lambda = \lambda(a), J_* = J_*(a)$ даны на рисунке. Достаточные условия минимума:

$$
\begin{gathered}
\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 J}{\partial P_*^2} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial P_* \partial M_*} \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial P_* \partial M_*} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial M_*^2} \end{vmatrix} = \frac{a^2d^2}{144(EJ)^4} > 0, \\
\Delta_2 = \frac{\partial^2 J}{\partial P_* \partial M_*} = \frac{a^2\left(4a^4 - 24a^3\ell + 9a^2d^2 + 36a^2\ell^2 - 36d^3\ell + 36d^2\ell^2\right)}{72E^2J_z^2} > 0.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Использование матрицы Гэссэ (с целью проверки достаточных условий минимума критерия) позволяет эффектно применить систему аналитических вычислений на ЭВМ (процедуры df , det).

Применение метода Ритца для поиска минимума полной энергии твердого тела в управляемом упруго-деформируемом состоянии позволяет решить ряд задач принципиальной трудности, как статически определимых, так и статически неопределимых. Решение задач осуществлялось при использовании – сложных интегральных и алгебраических критериев оптимальности, ограничений, комбинаций управляющих силовых воздействий, учете больших перемещений и многих других факторов, отражающих, например, характерные особенности конкретных технологических процессов. Для управляемого деформирования стержня (в общем случае – с переменным поперечным сечением, на упругом основании, при учете продольной силы, активных внешних нагрузок и сосредоточенных управляющих воздействий) полная энергия:

$$Э=\int_0^\ell \frac{\mathrm{EJ}(x)}{2}\left[W''(x)\right]^2 dx+\int_0^\ell \frac{kW^2(x)}{2}dx+\frac{S}{2}\int_0^\ell \left[W'(x)\right]^2 dx-\int_0^\ell qW(x)dx-$$
$$-\sum_{k_1=1}^{n_1} p_{k_1} W\left(a_{k_1}\right)-\sum_{k_2=1}^{n_2} M_{k_2} W'\left(a_{k_2}\right)+\sum_{k_3=1}^{n_3} U_{k_3} W\left(a_{k_3}\right)+\sum_{k_4=1}^{n_4} U_{k_4} W'\left(a_{k_4}\right)=\min, \quad (11)$$

где $EJ(x)$ – жесткость на изгиб, $W(x), W'(x), W''(x)$ – функция прогиба и ее производные; k – коэффициент постели упругого основания; S – продольная сила; q, P_k, M_k – активные внешние нагрузки; U_{k_3}, U_{k_4} – управляющие сосредоточенные воздействия (силы и моменты). Для функции прогиба используется полином $W(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i x^i$, где C_i – константы, которые находятся с учетом краевых условий и необходимых условий минимума функционала (11) $dЭ/\mathrm{dC_i}=0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Пример 2. Использование метода Ритца иллюстрируется на примере. В случае один раз статически неопределимого стержня переменного сечения (Рис. 2) выражение для полной энергии

$$Э=\frac{\mathrm{E}}{2}\int_0^{2\ell} J(x)\left[W''(x)\right]^2 dx-P_r W(a)-M_* W'(2\ell)=\min, \quad (12)$$

где $J(x)=\dfrac{\pi\,(d_2-d_1)^4 x^4}{64\,\ell^4}$.

Краевые условия $W(0)=W(\ell)=W(2\ell)=0$. Функция прогиба принята в виде $W=\sum_{i=1}^{4} C_i x^i$. Для критерия качества (в данном случае - условия) $W(a)$=0 получено следующее управление (в виде сосредоточенного опорного момента)

$$M_*=\frac{P_r\,a\left(-6a^4+35a^3\ell-84a^2\ell^2+97a\ell^3-42\ell^4\right)}{\ell^3(7a+8\ell)}. \quad (13)$$

Схема стержня и график управления M_* приведены на рис. 2.

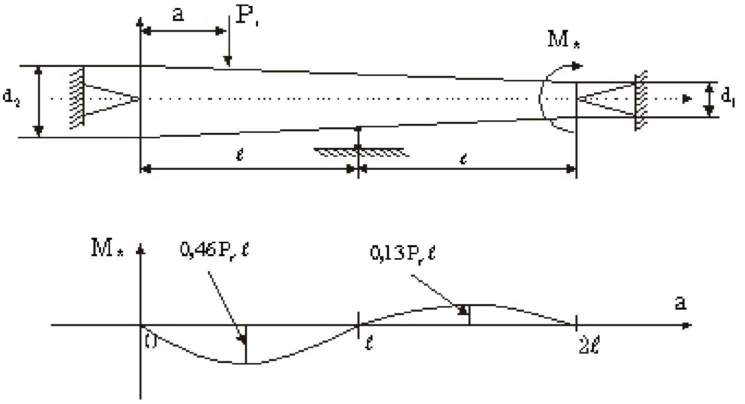

Рис. 2. Схема балки переменного сечения

Алгоритм синтеза управлений, основанный на применении метода Ритца, использовался для решения задач управления деформированием нежёстких заготовок при токарной обработке, а также для поиска управлений деформированием рук манипуляторов [4]. Данный подход может найти применение для поиска управлений деформированием в случае разворачивания и сборки крупногабаритных пространственных конструкций в космосе.

Рассмотренный алгоритм поиска управлений деформируемым состоянием твердых тел распространяется и на стержневые системы (например, стержневые конструкции минимальной массы телескопических и антропоморфных рук манипуляторов). При этом управляющие (либо компенсирующие) силовые воздействия, с целью облегчения практической реализации при построении САУ деформациями, выражаются через перемещения либо напряжения в характерных точках, для которых достаточно легко измерить эти величины. В технике возникает необходимость сочетания управлений по медленному движению – статическим положением равновесия и управления по быстрому движению – колебаниями, возникающих около медленно изменяющегося положения равновесия.

Список использованной литературы

1. Бохонский А. И. Оптимальное управление в некоторых задачах механики // Сопротивление материалов и теория сооружений.К.: 1982. - Вып. 41.- с. 129-133.
2. Бохонский А. И. Управление деформируемым состоянием балок и круглых дисков при медленном изменении положения нагрузки // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1991. -Вып. 59. - с. 107-110.
3. Еднерал В. Ф., Крюков А. П., Родионов А. Я. Язык аналитических вычислений REDUCE. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. - 176 с.

4. Бохонский А. И. Исполнительные органы минимальной массы манипуляторов с управляемым деформированием при учете температурных воздействий. Материалы междунар. конф. по крупногабаритным космическим конструкциям. НПО “Энергия”.Центр программных исслед. РАН и др.-Новгород.-1993.–с.77.
5. Бохонский А. И. Построение управлений деформациями твердых тел при медленно движущейся нагрузке/ Известия ВУЗов.-М.:Машиностроение, 1989.- №10. - с. 124-128.

Поступила в редколлегию 18.04.99