УДК 681.3

С.А. ДУБОВИК, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

# СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Для систем с малыми параметрами вводится понятие внешнего полинома и формулируется задача внешнего синтеза для линейной многомерной системы и квадратического критерия. Весовая матрица критерия однозначно определяется по характеристикам качества системы.

В теории управления синтез понимают как формирование обратной связи, обеспечивающей заданные характеристики качества и устойчивости замкнутой системы. Иногда к этому добавляются требования статической точности, которого в этой статье мы касаться не будем.

Пусть задана некоторая замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; u = Dx \,. \tag{1}$$

В том случае, когда передаточная функция (1) в разомкнутом состоянии

$$W(s) = -D(sI_n - A)^{-1} B$$

является скалярной (то есть $D^T$ и $B$ - векторы), и управление рассматривается на неограниченном справа промежутке, задача синтеза ставится и решается с помощью метода логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) $L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|$, основанного на построении желаемой асимптотической ЛАЧХ. Подчеркнем, что именно асимптотический характер ЛАЧХ, связанный с упорядоченной совокупностью малых постоянных времени, обеспечивает конструктивный синтез регулятора в стационарной скалярной задаче.

В этой статье приводятся постановка задачи синтеза и ее решение в более общей ситуации линейной многомерной системы. Предполагая пару $(A, B)$ управляемой, будем рассматривать систему (1) в канонических координатах. Такое представление можно использовать для синтеза, если известен заданный характеристический полином системы (модальное управление), чего трудно ожидать для объектов высокого порядка. С другой стороны, качественная особенность многомерных систем проявляется обычно в разномасштабности движений, представляющих динамику таких систем. Формально это можно

© С. А. Дубовик 

описать с помощью параметров различной степени малости при производных в системе уравнений первого порядка [1], но мы ограничимся здесь одним параметром $\lambda$, разделяя движения на "быстрые" и "медленные" (внешние). Все множество корней характеристического полинома $\widetilde{P}_n(s)$ такой системы (волна обозначает сингулярную зависимость от малого параметра) можно разбить на $n_1 = l$ больших и $n_0 = m$ малых по абсолютной величине, $n = m + l$. Для коэффициентов $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \cdots, \widetilde{a}_{n-1})$ полинома $\widetilde{P}_n(s) = s^n + \widetilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \widetilde{a}_0$ будем иметь из канонического разложения на множители

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} \lambda^{m-n}\alpha_i, & i = 0,1,\cdots,m-1, \\ \lambda^{i-n}\alpha_i, & i = m, m+1, \cdots, n-1, \end{cases}$$

где $\alpha_i = \alpha_i(\lambda)$ регулярным образом зависят от $\lambda$. Если теперь разделить множество коэффициентов $\widetilde{a}$ на два блока $\widetilde{a} = (\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1)$, где

$$\widetilde{\alpha}_0 = (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \cdots, \widetilde{a}_{m-1}), \quad \widetilde{\alpha}_1 = (\widetilde{a}_m, \widetilde{a}_{m+1}, \cdots, \widetilde{a}_{n-1}),$$

причем коэффициенты блока $\widetilde{\alpha}_0$ составляют гурвицев полином, то можно записать характеристический полином вырожденной (внешней) системы

$$\beta = \widetilde{\alpha}_0 / \widetilde{a}_m$$

(отождествляя унитарный полином степени $n$ с $n-$вектором его коэффициентов). Этот последний будем называть внешним полиномом системы (1). Для приложений он оказывается более предпочтительной характеристикой качества, чем полином $\widetilde{P}_n(s)$. Так, в случае $m = 2$ и при достаточно малом $\lambda$ условие на коэффициенты внешнего полинома эквивалентно требованию на прямые характеристики качества - время регулирования, перерегулирование и прочее. В связи с этим, сформулируем следующую задачу внешнего синтеза для системы (1), заданной в канонических координатах:

пусть задан блочный $n-$вектор (полином) $C^T = \left(C_0^T, C_1^T\right)$,

$$C_0 = (c_{00}, c_{01}, \cdots, c_{0(m-1)}), \quad C_1 = (c_{10}, c_{11}, \cdots, c_{1(l-1)}),$$
$$c_{10} \neq 0, \quad n = m + l,$$

соответствующий ему $m-$полином

$$\eta = f_0(C) = C_0 / c_{10}; \tag{2}$$

функционал

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_t^T C^T C x_t + u_t^2)dt \tag{3}$$

необходимо минимизировать на движениях системы

$$\dot{x}_t = \tilde{J}x_t + \tilde{b}u_t, \tag{4}$$

где $\tilde{J} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_0 & E \\ 0 & \tilde{J}_1/\lambda \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_{ll}/\lambda \end{pmatrix}$, $\tilde{J}_0 = (0, e_{m1}, e_{m2}, \cdots, e_{m(m-1)})$,

$$\tilde{J}_1 = (0, e_{l1}, e_{l2}, \cdots, e_{l(l-1)}), \quad E = e_{m1}e_{ll}^T,$$

$e_{ni} -$ $n-$вектор, $i-$тый элемент которого единица, а остальные- нули.

Смысл этой задачи, имеющей при $c_{00} \neq 0$ единственное решение

$$u_t = \tilde{D}x_t, \tag{5}$$

проясняет следующая

**Теорема.** Пусть в задаче (2)-(4) полином $\eta$ - гурвицев. Тогда замкнутая система (4),(5) имеет внешний полином $\eta$, то есть

$$f_0(\lim_{\lambda \to 0} \tilde{D}) = \eta,$$

где полином - $\tilde{D}$ – также гурвицев.

Для доказательства воспользуемся тождеством Калмана [2] для оптимальной системы:

$$\left[1 + \tilde{W}(-s)\right]\left[1 + \tilde{W}(s)\right] = 1 + \tilde{W}_C(-s)\tilde{W}_C(s), \tag{6}$$

где передаточные функции системы в разомкнутом состоянии имеют вид

$$\tilde{W}_C(s) = -C\left(sI_n - \tilde{J}\right)^{-1}\tilde{b}, \qquad \tilde{W}(s) = \tilde{W}_{\tilde{D}}(s). \tag{7}$$

Как легко проверяется, для $J_n = (0, e_{n1}, e_{l2}, \cdots, e_{n(n-1)})$

$$(I_n s - J_n)^{-1} = \sum_{i=1}^n s^{-i} J_n^{i-1},$$

в результате чего операцию обращения в (7) можно выполнить явно и для $\tilde{W}(s)$ получаем

$$\tilde{W}(s) = -\lambda^{-l}\left[R_0(s) + s^m R_1(s)\right]/s^n,$$

где

$$R_0(s)=\sum_{i=0}^{m-1} d_{0i}s^i\ , \qquad R_1(s)=\sum_{i=0}^{l-1} d_{1i}(\lambda s)^i\ .$$

Подставляя это и аналогичное представление для $\widetilde{W}_C(s)$ в (6) и домножая на $\lambda^{2l}(-s)^n s^n$, будем иметь равенство

$$\widetilde{\Lambda}(s)=\widetilde{\Pi}(s), \tag{8}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}(s)=\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{\Lambda}_i s^{2i}\ , \qquad \widetilde{\Pi}(s)=\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{\Pi}_i s^{2i}\ .$$

Приравнивая в (8) коэффициенты $\widetilde{\Lambda}_i$ и $\widetilde{\Pi}_i$ при одинаковых степенях $s$ и устремляя $\lambda$ к нулю, получим систему уравнений

$$\Lambda_k = \Pi_k\ ,\ \ k=0,1,\cdots,n-1, \tag{9}$$

для определения полинома $D=\lim\limits_{\lambda\to 0}\widetilde{D}$.

После несложных преобразований первые $m$ уравнений (9) приводятся к виду:

$$\sum_{i+j=2k}\left(d_{0i}d_{0j}-c_{0i}c_{0j}\right)(-1)^i+\alpha_{km}=0 \tag{10}$$

где $k=0,1,\cdots,m-1,$

$$\alpha_{km}=\begin{cases} 0, & \text{если } 2k<m\ , \\ 2\left[(-1)^{2k-m}+(-1)^m\right]\left(d_{0(2k-m)}-c_{0(2k-m)}\right)c_{10}\ , & \text{если } 2k\ge n. \end{cases}$$

Вводя $m$ –векторы $x=D_0=(d_{00},d_{01},\cdots,d_{0(m-1)})$ и $y=C_0$, систему (10) можно записать в форме векторного нелинейного уравнения

$$\varphi(x,y)=0, \tag{11}$$

где $m$ – вектор-функция $\varphi$ удовлетворяет условиям гладкости теоремы о неявной функции. Уравнение (10) имеет решение $D_0=C_0$ (или $x=y$ ). При этом для отображения $\varphi$ в точке $x=y$ матрица частных производных по элементам $x$ в (11), как это следует из (10), с точностью до коэффициента $2c_{10}\neq 0$ и чередования знаков в ее столбцах совпадает с матрицей Гурвица для полинома $\eta=f_0(C)$. Следовательно, в силу гурвицевости $\eta$, якобиан отображения $\varphi$ в (11) не равен нулю и по теореме о неявной функции решение $D_0=C_0$ является изолированным, что дает требуемое равенство для полиномов вырожденных систем $f_0(D)$ и $f_0(C)$. Гурвицевость – $\widetilde{D}$ следует из того, что $\widetilde{D}$ является решением задачи об оптимальном стационарном регуляторе [2]. Теорема доказана.

Этот результат указывает на асимптотическую близость внешнего полинома $f_0\left(\widetilde{D}\right)$ и эталонного полинома $f_0(C)$, причем последний тем проще задать, чем меньше его порядок.

Пример: $n = 5,\ m = 2,\ C = (C_0, C_1),\ \ \lambda = 0.1,$

$$C_0 = (-0.1, -0.5), \quad C_1 = (-0.5,\ -1.0,\ -2.0\ ).$$

В этом случае тождество Калмана приводит к системе пятого порядка:

$$d_{00}{}^2 - c_{00}{}^2 = 0\,, \qquad d_{01}{}^2 - 2d_{00}d_{10} - c_{01}{}^2 + 2c_{00}c_{10} = 0\,,$$
$$2\lambda\, d_{01}d_{11} - d_{10}{}^2 - 2\lambda^{\,2} d_{00}d_{12} + c_{10}{}^2 - 2\lambda\, c_{01}c_{11} + 2\lambda^{\,2} c_{00}c_{12} = 0\,,$$
$$d_{11}{}^2 - 2d_{10}d_{12} - 2\lambda\, d_{01} - c_{11}{}^2 + 2c_{10}c_{12} = 0\,, \qquad d_{12}{}^2 + 2d_{11} - c_{12}{}^2 = 0\,.$$

Численное решение этой системы с начальным приближением $\widetilde{D}^{(0)} = C$ дает $\widetilde{D} \cong \left(-0.0999, -0.505, -0.525, -1.257, -2.552\right)$, или

$$f_0(\widetilde{D}) = (\ -0.0999,\ -0.505\ )/-0.525 = (\ 0.19,\ 0.96\ )\,,$$

тогда как эталонный внешний полином

$$\eta = f_0(C) = C_0\,/\,c_{10} = (\ 0.2,\ 1.0\ )\,.$$

В заключение заметим, что внешнее качество системы в функционале (3) задается по доказанному параметрами $C_0$ и $c_{10}$, все же остальные элементы строки $C$ могут определяться по соображениям сходимости численной процедуры, которая легко реализуется в MathCADe с помощью функции Find.

**Список использованной литературы**


1. Дубовик С. А. Синтез сингулярно возмущенных систем на основе канонических представлений // Вестник СевГТУ: Сб. научн. тр.- Севастополь,1998.- Вып.14.-С.68-72.
2. Александров А. Г. Синтез регуляторов многомерных систем.– М.: Машиностроение, 1986.-272с.


Поступила в редколлегию 14.05.99