УДК 539.3

А. В. Каштанов, студ., Ю.В. Петров, проф.
СПбГУ, мат.-мех. ф-т, каф. теории упругости

О ФРАКТАЛЬНОМ РАЗРУШЕНИИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЛУНОЧНЫМ ВЫРЕЗОМ

Для задачи о растяжении плоскости, ослабленной вырезом в виде симметричной лунки, обоснована возможность выполнения условия энергетического баланса. Развивающаяся из угловой точки упругой области макротрещина моделируется фракталом дробной размерности; определяется зависимость размерности фрактальной трещины от величины угла луночного выреза, позволяющая удовлетворить уравнению энергетического баланса Гриффитса, что невозможно сделать в рамках классической механики разрушения. На основе этого вычислено значение разрушающей нагрузки в поставленной задаче.

Хорошо известно, что методы обычной механики не дают энергетически приемлемого описания механизма страгивания трещины или других типов изломов в среде без дефектов. Например, можно легко проверить, что появление бесконечно малой трещины в однородной пластине под действием равномерной, направленной во все стороны нагрузки, приводит к нарушению энергетического баланса в рамках концепции Гриффитса о приращении поверхностной энергии.

Даже в случае задачи о нагружении упругой плоскости, за исключением задачи Гриффитса, распространение трещины не объяснено. Для угловых концентраторов напряжений обычно используют критерий Новожилова. В случае распространения поверхности разрушения этот силовой критерий и вышеупомянутый энергетический критерий, по существу, эквивалентны. Н. Ф. Морозовым было показано, что при рассмотрении задачи об упругой области с угловым вырезом вблизи некоторой точки границы вычисление приращения потенциальной энергии и проверка энергетического баланса не могут быть выполнены в рамках классических представлений механики разрушения [1].

Если же предположить, что структуру поверхностей трещин можно моделировать фрактальными поверхностями, то уравнение энергетического баланса может быть записано, и получен приемлемый критерий разрушения [9]. Это предположение небезосновательно. Поверхность излома или трещины, формирующаяся при разрушении, обычно является нерегулярной в том смысле, что она имеет множество неровностей самых разных размеров. Поэтому реальная трещина не похожа на идеальные модели с гладкими берегами, рассматриваемые в теории механики разрушения. Более того, в монографии

Мандельброта [6] показано статистическое самоподобие поверхности трещины. Эти рассуждения и позволяют считать поверхности разрушения фрактальными, но с некоторыми оговорками. Следует помнить, что с математической точки зрения фрактал "извилист" даже в бесконечно малой окрестности любой своей точки и длина его, с топологической точки зрения, бесконечна, в то время, как "извилистость" и площадь трещины конечны. Поэтому, фрактальная модель применима для масштабов много больших характерных размеров микроструктуры среды, например, размера зерна для металлов, но много меньших, чем геометрические размеры тела.

Рассмотрим задачу об упругой плоскости, ослабленной вырезом в виде симметричной лунки, растягиваемой на бесконечности равномерной нагрузкой (рис. 1). Такая задача была решена независимо Е.Вейнелем и Ч.Лингом. Это решение в изложении Я.С.Уфлянда приведено в [7].

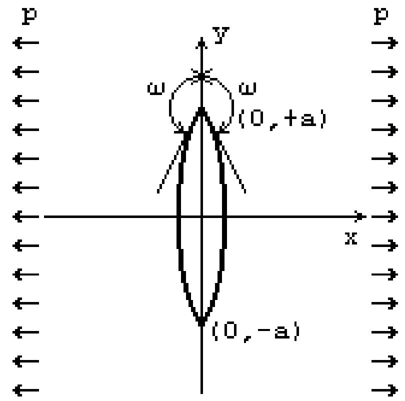

Рис.1

Предположим, что трещины, выходящие из вершин лунки, представляют собой фракталы размерности D. Далее будем говорить лишь об одной из этих трещин, очевидно, что про вторую из них можно сказать все тоже самое. Пусть она "в среднем" распространяется вдоль оси y, т.е. вдоль трещины $< x > \sim 0$. Пусть трещина распространилась на величину ε вдоль оси y и на величину ε_1 вдоль оси x, $\varepsilon_1 << \varepsilon$. На масштабах, сравнимых с ε, трещина "в среднем" выглядит как одномерный разрез, но при $l << r << l_1$ (где l - размер, связанный с микроструктурой тела, в котором распространяется трещина, l_1 - характерный геометрический размер этого тела, а r - масштаб фрактальной модели), "истинная" длина трещины L связана с размером ε по фрактальному закону $L \sim \varepsilon^{D}$.

Асимптотические формулы для напряжений были получены Б. Н. Семеновым в работе [8]:

$$\sigma_{yy}(0,y)|_{y\to a} = pc(\omega)\left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu(\omega)-1} + \ldots .$$

Здесь $\mu = i\lambda$, $\sinh 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega = 0$ (рис.2),

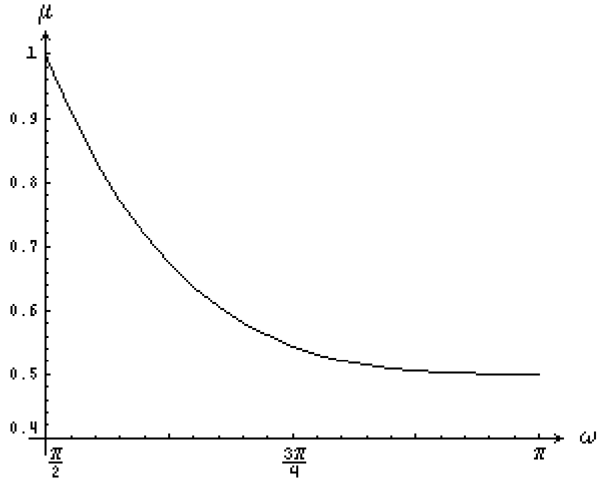

Рис.2

а коэффициент $c_1(\omega)$ может быть посчитан и представлен в виде графика (рис.3). Отметим, что $c_1(\pi) = 1/2$, а $c_1(\pi/2) = 3$.

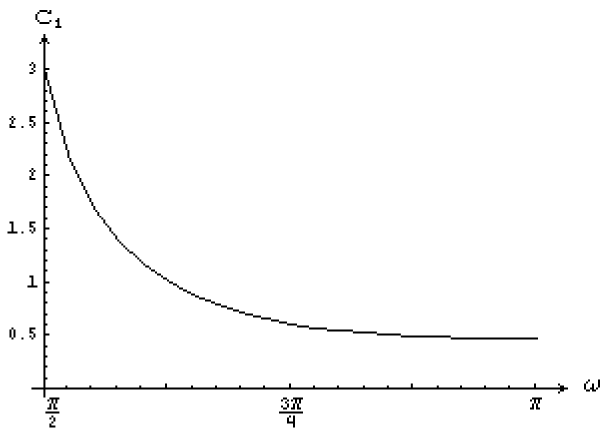

Рис.3

Поскольку в результате разрушения в углах лунки образуются надрывы (трещины), то поле перемещений следует определять из решения задачи о разрушении плоскости при одноосном растяжении, ослабленной лункой с надрезами (рис.4). Пусть из угла лунки выросла трещина длины $\varepsilon \ll a$ вдоль оси y.

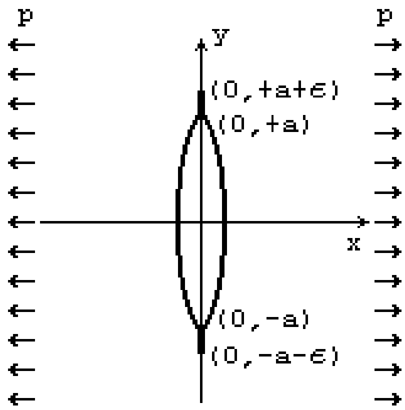

Рис.4

Поле перемещений в окрестности точек $(a+\varepsilon, 0)$, $(-a-\varepsilon, 0)$ было определено Н. Ф. Морозовым в [7]:

$$u_y(0, y)|_{y\to a+\varepsilon} = 6pK_1(\omega)\varepsilon^{\mu-1/2}\frac{\sqrt{|r-\varepsilon|}}{(2a)^{\mu}} + \dots ,$$

величина $K_1(\omega)$ приведена в табл.1.

Табл.1

ω	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$K_1(\omega)$	0.022	0.066	0.099	0.117	0.129	0.136	0.150

Энергетический критерий Гриффитса страгивания трещины можно записать в виде

$$\Delta W = \Delta\Pi ,$$

где ΔW – работа по раскрытию трещины, затраченная на образование новой поверхности, а $\Delta\Pi$ – поверхностная энергия трещины.

Пользуясь приведенными асимптотиками для напряжений и перемещений в окрестности углов лунки, можно произвести подсчет $\Delta W = -\int_0^{\varepsilon} u_y \sigma_{yy} dr\,|_{x=0}$. В результате получится следующее выражение для работы по раскрытию трещины:

$$\Delta W = -3\sqrt{\pi}\, p^2 \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+3/2)} K_1(\omega) c_1(\omega)\varepsilon^{2\mu} ,$$

здесь $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ – Гамма-функция Эйлера.

Поверхностную энергию трещины будем считать через истинную (фрактальную) длину трещины, так как необходимо учитывать микроструктуру разрушения, то есть

$$\Delta\Pi = -2\gamma\,\varepsilon^{\,D}.$$

Очевидно, чтобы получить выражение для критической нагрузки из уравнения энергетического баланса $\Delta W = \Delta\Pi$, необходимо потребовать совпадения показателей степени ε в левой и правой частях этого соотношения, то есть

$$D = 2\mu.$$

Не уменьшая общности, можем считать длину луночного выреза $2a$ равной 1. Заметим, что при $\omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $D \in [1,2]$, то есть величина D может выступать в роли размерности Хаусдорфа фрактальной кривой (см., например, [5]). Определив таким образом фрактальную размерность трещины из формальных соображений удовлетворения уравнению энергетического баланса, можем выразить критическую нагрузку p_* следующим образом (рис.5):

$$p_*^2 = \frac{2\gamma\,\Gamma(\mu + 3/2)}{3\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu) K_1(\omega)\, c_1(\omega)}.$$

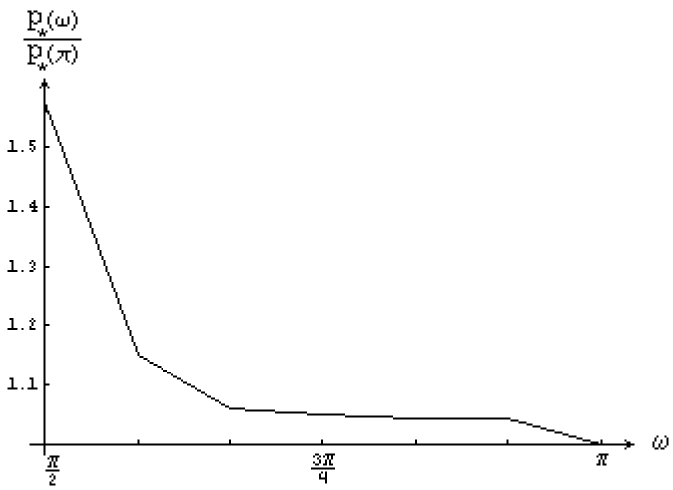

Рис.5

Итак, моделируя трещину фракталом дробной размерности, которая однозначно определяется величиной угла луночного выреза, удалось удовлетворить уравнению энергетического баланса в рассматриваемой задаче и при помощи этого уравнения найти критическую нагрузку, при которой начинается процесс разрушения. Кроме того, получена формула для фрактальной размерности трещины, дающая возможность предсказывать вид поверхности разрушения по величине угла лунки и наоборот [9].

В заключение перепишем полученные выше результаты, используя выражение для фрактальной размерности образующихся трещин.

$$\sigma_{yy}(0,y)|_{y\to a} = pc_1(\omega)\left(\frac{r}{2a}\right)^{\frac{D-2}{2}} + \ldots \quad ,$$

$$u_y(0,y)|_{y\to a+\varepsilon} = 6pK_1(\omega)\varepsilon^{\frac{D-1}{2}} \frac{\sqrt{|r-\varepsilon|}}{(2a)^{D/2}} + \ldots \quad ,$$

$$A^2(\omega) = \frac{p_*^2(\omega)}{p_*^2(\pi)} = \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)K_1(\omega)c_1(\omega)},$$

то есть имеем следующие асимптотические зависимости:

$$\sigma \sim r_0^{\frac{D-2}{2}},\ u \sim r_0^{\frac{D}{2}},$$

где r_0 – некоторая характерная величина с размерностью длины. Полученные асимптотики совпадают с асимптотиками, приведенными в [2], [3], [4].

Представленная работа показывает, что при помощи фрактальной геометрии можно не только сформулировать в новом свете принципы механики квазихрупкого разрушения, но и решать конкретные задачи, с которыми не в силах справиться классическая теория.

Список использованной литературы.

1. Maz'ya V.G., Morozov N.F., Nazarov S.A. "On the Elastic Strain Energy Release Due to the Variation of the Domain Near the Angular Stress Concentrator"// Linkoping University. 1990. 36 P.
2. Мосолов А.Б. "Фрактальная гриффитсова трещина"// Журнал технической физики. 1991. Т. 61. N7. С.57-60.
3. Гольдштейн Р.В., Мосолов А.Б. "Мультифрактальная геометрия разрушения и масштабный эффект"// Доклады Академии Наук. 1993. Т.329. N4. С.429-432.
4. Гольдштейн Р.В., Мосолов А.Б. "Фрактальные трещины"// Прикладная математика и механика. 1992. Т.56. N4. С.663-671.
5. Баренблатт Г.И. "Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика"// Л., Гидрометеоиздат. 1982. 255 с.

6. Mandelbrot B.B. "The Fractal Geometry of Nature" //San-Francisco, Freeman. 1983.
7. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин// М.,"Наука".1984. 256с.
8. Семенов Б.Н. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности луночного выреза. МТТ, 1980. N3.
9. Каштанов А.В., Петров Ю.В. Об энергетическом балансе в задаче о разрушении упругой плоскости с угловым вырезом// Вестник СПбГУ, Сер.1. 1998. Вып.4. N22. С.102-104.

Поступила в редколлегию 18.02.99