УДК 517.92

В. Г. Козырев, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ПОЧТИ ТОЧНОГО ПРИВЕДЕНИЯ В НОЛЬ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ОБЪЕКТА

Метод штрафных функций применяется для построения оптимального регулятора, приводящего сингулярно возмущенный объект в малую окрестность заданного положения. Доказано, что сходимость траектории объекта к траектории точного приведения при неограниченном увеличении коэффициента штрафа является равномерной по сингулярному параметру.

Оптимальный регулятор для приведения объекта в малую окрестность заданного положения построен в работах [1,2] без учета возможного влияния сингулярных возмущений на движение объекта. Такие возмущения, представленные в уравнениях объекта малым параметром при старших производных, могут исказить движение и сделать ошибку наведения большой. Поэтому возникает вопрос о равномерной малости ошибки по малому параметру на промежутке управления.

Этот вопрос решается в данной статье для объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = A_1(t)y + A_2(t)z\ ,\ \ y\big|_{t=0} = y^0, \\ &\lambda \cdot \frac{dz}{dt} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_z(t)u,\ \ z\big|_{t=0} = z^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\lambda > 0$ - малый сингулярно возмущающий параметр.
Уравнения (1) заданы на фиксированном отрезке времени $0 \le t \le T$. Управление $u(t)$ выбирается так, чтобы минимизировать квадратичный функционал

$$I[u(t)] = \frac{1}{\lambda_f} x'H'FHx\big|_{t=T} + \int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt, \tag{2}$$

где $\lambda_f > 0$ – другой малый параметр.

В выражениях (1), (2): $y \in E^n$, $z \in E^m$; $x = col[y,z] \in E^l$ ($l = n+m$) – вектор состояния; $u \in E^r$ - вектор управления, причем управление осуществляется только по переменной z; матрицы $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ и $B_z(t)$ непрерывны на отрезке $0 \le t \le T$; H - постоянная матрица $q \times l$, $q \le l$ вида $H = [H_y, 0]$, где H_y - матрица $q \times n$; F - постоянная положительно определенная матрица $q \times q$; $Q(t)$ - неотрицательно, а $R(t)$ - положительно определенные непрерывные матрицы, $Q(t)$ имеет блочный вид: $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix}$, где блоки имеют размерности: Q_1 - $n \times n$, Q_3 - $m \times m$; $Q_3(t) \equiv 0$; штрих обозначает транспонирование.

Обратная величина малого параметра $1/\lambda_f$ в терминальном члене функционала (2) определяет коэффициент штрафа, накладываемого на качество регулирования за неточное приведение объекта в нулевое положение по координате $\xi = Hx$ при $t = T$. Чтобы избежать большой величины штрафной функции $(1/\lambda_f)\xi'\xi \,|_{t=T}$, регулятор будет стремиться свести величину $\xi(T)$ к малому, близкому к нулю значению $\xi(T) \approx 0$ (если λ_f достаточно мало). В этом и состоит смысл метода штрафных функций и строго обосновывающих его теорем из [1,2].

Однако при наличии сингулярных возмущений в структуре объекта, представленных другим малым параметром λ, этот метод нуждается в дополнительном обосновании, так как при стремлении λ к нулю ошибка наведения по положению $\xi(T) = 0$ уже не обязательно должна быть бесконечно малой при малом значении штрафного параметра λ_f. В этой статье и доказывается малость этой ошибки при определенных предположениях.

Введем блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\lambda}A_3 & \frac{1}{\lambda}A_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda}B_z \end{bmatrix}, S = BR^{-1}B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2}S_z \end{bmatrix}, S_z = B_z R^{-1} B_z'.$$

Если система (1) управляема, оптимальное управление в смысле критерия (2) существует и определяется выражением [1]:

$$u = -R^{-1}B'Kx \,, \tag{3}$$

где K - матрица $l \times l$, удовлетворяющая матричному уравнению Риккати

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A'K + KSK - Q, \quad 0 \le t \le T, \quad K\Big|_{t=T} = \frac{1}{\lambda}H'FH\,.$$

Согласно [3] матрицу K можно представить в виде

$$K = P + W'(M + \lambda_f F^{-1})^{-1}W\,, \tag{4}$$

где матрицы P, W и M суть решения уравнений

$$\frac{dP}{dt} = -PA - A'P + PSP - Q, \qquad P\big|_{t=T} = 0,$$

$$\frac{dW}{dt} = -W(A - SP), \qquad W\big|_{t=T} = H,$$

$$\frac{dM}{dt} = -WSW', \qquad M\big|_{t=T} = 0.$$

Регулятор (3), (4) приводит объект в малую окрестность нулевого положения по обобщенной координате $\xi(T) = Hx(T) = 0$ при $\lambda_f \to 0$ [2-3]. Точный регулятор, приводящий объект строго в нулевое положение $\xi(T) = Hx(T) = 0$ при минимуме функционала

$$\bar{I}[u(t)] = \int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]\,dt, \tag{5}$$

имеет вид [1]:

$$\bar{u} = -R^{-1}B'\bar{K}x, \tag{6}$$

$$\bar{K} = P + W'M^{-1}W. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема, отвечающая на вопрос о малости ошибки наведения регулятора (3), (4) при наличии другого малого параметра λ.

<u>Теорема</u>. Пусть система (1) вполне управляема, все собственные числа матрицы $A_4(t)$ лежат в левой полуплоскости и $rank[B_2(t), A_4(t)B_2(t), \ldots, A_4^{m-1}(t)B_2(t)] = m$ для всех $0 \le t \le T$. Обозначим $y = y(t,\lambda,\lambda_f)$, $z = z(t,\lambda,\lambda_f)$, $u = u(t,\lambda,\lambda_f)$ – траектория и управление для почти точного регулятора (3), (4), а $\bar{y} = \bar{y}(t,\lambda)$, $\bar{z} = \bar{z}(t,\lambda)$, $\bar{u} = \bar{u}(t,\lambda)$ - аналогичные характеристики для точного регулятора (6), (7). Тогда, если $Q_3(t) \equiv 0$, то при $\lambda_f \to 0$

$$\begin{aligned} \|y(t,\lambda,\lambda_f) - \bar{y}(t,\lambda)\| &\le \lambda_f \cdot const, \\ \|z(t,\lambda,\lambda_f) - \bar{z}(t,\lambda)\| &\le \lambda_f \cdot const, \\ \|u(t,\lambda,\lambda_f) - \bar{u}(t,\lambda)\| &\le \lambda_f \cdot const, \end{aligned} \tag{8}$$

а если $Q_3(t) \ne 0$ тождественно, то при $\lambda_f \to 0$

$$\begin{aligned}
&\left\| y(t,\lambda,\lambda_f) - \bar{y}(t,\lambda) \right\| \le \lambda_f \cdot const\ , \\
&\left\| z(t,\lambda,\lambda_f) - \bar{z}(t,\lambda) \right\| \le \lambda_f \cdot (1 + \frac{1}{\lambda} exp(\frac{t-T}{\lambda C})) \cdot const\ , \\
&\left\| u(t,\lambda,\lambda_f) - \bar{u}(t,\lambda) \right\| \le \lambda_f \cdot (1 + \frac{1}{\lambda} exp(\frac{t-T}{\lambda C})) \cdot const\ ,
\end{aligned} \qquad (9)$$

где выражения вида $\|\bullet\|$ обозначают норму вектора или матрицы; *const* не зависит от t, λ и λ_f для всех $0 \le t \le T$, $0 < \lambda \le \Delta$, $0 < \lambda_f \le \Delta$, $\Delta > 0$ - любое фиксированное число; $C > 0$ – некоторое число.

Теорема утверждает, что при $Q_3(t) \equiv 0$ траектории и управления, формируемые точным и приближенным регуляторами, сответственно равномерно близки на области $0 \le t \le T$, $0 < \lambda \le \Delta$ при $\lambda_f \to 0$. Это означает, в частности, что приближенный регулятор (3), (4) приводит объект в малую окрестность заданного положения $\xi = Hx|_{t=T} = 0$ при $\lambda_f \to 0$ независимо от значения малого параметра $\lambda \in (0, \Delta]$. В то же время, если $Q_3(t)$ не равно нулю тождественно, то взаимная близость “быстрых” переменных z и $\bar{z}$ и управлений u и $\bar{u}$ не гарантируется, а имеет место только вне малой окрестности момента $t=T$.

Доказательство. Матрицы P и W зададим в блочной форме $P = \begin{bmatrix} P_1 & \lambda P_2 \\ \lambda P_2' & \lambda P_3 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} W_y & \lambda W_z \end{bmatrix}$, где $P_1 - n \times n$, $P_3 - m \times m$, $W_y - q \times n$, $W_z - q \times m$ матрицы. После подстановки выражений для оптимальных регуляторов (3), (4) и (6), (7) в систему (1) и почленного вычитания уравнений получим уравнения для отклонений $\Delta y = y - \bar{y}$, $\Delta z = z - \bar{z}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Delta y}{dt} = A_1 \Delta y + A_2 \Delta z, \quad \Delta y|_{t=0} = 0, \\
&\lambda \cdot \frac{d\Delta z}{dt} = A_{3p} \Delta y + A_{4p} \Delta z - S_z W_z' (f - \bar{f}), \quad \Delta z|_{t=o} = 0,
\end{aligned} \qquad (10)$$

где

$$A_{3p} = A_3 - S_z P_2'; \quad A_{4p} = A_4 - S_z P_3';$$

$$f = (M + \lambda_f F^{-1})^{-1} (W_y \cdot y + \lambda W_z \cdot z); \quad \bar{f} = M^{-1} (W_y \cdot \bar{y} + \lambda W_z \cdot \bar{z}).$$

Нетрудно убедиться, что $\frac{df}{dt} \equiv 0, \ \frac{d\bar{f}}{dt} \equiv 0$ и, следовательно,

$$f = f_0 = (M + \lambda_f F^{-1})^{-1}(W_y \cdot y^0 + \lambda W_z \cdot z^0)\big|_{t=0} ,$$

$$\bar{f} = \bar{f}_0 = M^{-1}(W_y \cdot y^0 + \lambda W_z \cdot z^0)\big|_{t=0} .$$

Проанализируем систему уравнений (10). Пусть $D(t,\vartheta,\lambda)$ - ее весовая матрица: $D = \begin{bmatrix} D_1 & D_3 \\ D_2 & D_4 \end{bmatrix}$, удовлетворяющая, как функция первого аргумента, уравнению

$$\frac{dD}{dt} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\lambda}A_{3p} & \frac{1}{\lambda}A_{4p} \end{bmatrix} \cdot D , \qquad D\big|_{t=\vartheta} = E_l , \tag{11}$$

$0 \le \vartheta \le t \le T$, E_l – единичная матрица $l \times l$.
Тогда решение (10) можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta y(t,\lambda,\lambda_f) &= \int_0^t \frac{1}{\lambda} D_3(t,\vartheta,\lambda) S_z(\vartheta) W_z'(\vartheta,\lambda)(\bar{f}_0 - f_0)d\vartheta \\ \Delta z(t,\lambda,\lambda_f) &= \int_0^t \frac{1}{\lambda} D_4(t,\vartheta,\lambda) S_z(\vartheta) W_z'(\vartheta,\lambda)(\bar{f}_0 - f_0)d\vartheta \end{aligned} \tag{12}$$

В свою очередь, систему (11) можно переписать в виде

$$\frac{dD}{dt} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\lambda}A_{3\tilde{p}} & \frac{1}{\lambda}A_{4\tilde{p}} \end{bmatrix} \cdot D + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ O_3 & O_4 \end{bmatrix} \cdot D, \quad D\big|_{t=\vartheta} = E_l, \quad 0 \le \vartheta \le t \le T ,$$

где $A_{3\tilde{p}} = A_3 - S_z \tilde{P}_2'$, $A_{4\tilde{p}} = A_4 - S_z \tilde{P}_3'$, а $\tilde{P}_2$, $\tilde{P}_3$ и O_3, O_4 соответственно главные и остаточные члены асимптотических разложений величин P_2, P_3 при $\lambda \to 0$ [3]: $P_i(t,\lambda) = \tilde{P}_i(t,\lambda) + \lambda O_i(t,\lambda)$, $i=3,4$; $\|O_i(t,\lambda)\| < const$ при $\lambda \to 0$ и $0 \le t \le T$.

Поэтому блоки D_3 и D_4 можно представить как

$$D_3(t,\vartheta,\lambda) = \Gamma_3(t,\vartheta,\lambda) + \int_\vartheta^t \Gamma_3(t,s,\lambda)[O_3(s,\lambda)D_3(s,\vartheta,\lambda) + J(s,\vartheta,\lambda)]ds ,$$

$$D_4(t,\vartheta,\lambda) = \Gamma_4(t,\vartheta,\lambda) + \int_\vartheta^t \Gamma_4(t,s,\lambda)[O_3(s,\lambda)D_3(s,\vartheta,\lambda) + J(s,\vartheta,\lambda)]ds ,$$

$$J(s,\vartheta,\lambda) = O_4(s,\lambda)D_4(s,\vartheta,\lambda)$$

где Γ_3 и Γ_4 - блоки весовой матрицы $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_3 \\ \Gamma_2 & \Gamma_4 \end{bmatrix}$, удовлетворяющей аналогичному к (11) матричному уравнению, в котором вместо величин A_{ip} стоят $A_{i\tilde{p}}$, $i=3,4$.

В работе [3] показано, что для весовой матрицы Γ имеют место асимптотические оценки при $\lambda \to 0$:

$$\|\Gamma_3(t,\vartheta,\lambda)\| \le \lambda \cdot const \ , \ \ \|\Gamma_4(t,\vartheta,\lambda)\| \le const(e^{\frac{\vartheta - t}{\lambda C}} + \lambda) \ ,$$

где $const$ не зависит от λ, t и ϑ при $0 < \lambda \le \Delta$, $0 \le \vartheta \le t \le T$.

Применяя метод последовательных приближений

$$D_i^0 = \Gamma_i, \ \ D_i^n = \Gamma_i + \int_{\vartheta}^{t} \Gamma_i(O_3 D_3^{n-1} + O_4 D_4^{n-1})ds \ , \ i = 3, 4; \ \ n = 1, 2, \ldots ,$$

можно доказать, что D_3 и D_4 удовлетворяют следующим асимптотическим оценкам при $\lambda \to 0$, $0 \le \vartheta \le t \le T$:

$$\|D_3(t,\vartheta,\lambda)\| \le \lambda \cdot const, \ \|D_4(t,\vartheta,\lambda)\| \le \cdot const(e^{\frac{\vartheta - t}{\lambda C}} + \lambda + e^{\frac{t-T}{\lambda C}}) ,$$

$const$ не зависит от t, ϑ, λ на указанных промежутках.

Здесь мы полагали, что $Q_3(t) \equiv 0$. Если же $Q_3(t)$ не равно тождественно 0, то оценка для D_4 хуже:

$$\|D_4(t,\vartheta,\lambda)\| \le \cdot const(e^{\frac{\vartheta - t}{\lambda C}} + \lambda + e^{\frac{t-T}{\lambda C}}) .$$

С учетом очевидных неравенств $\|f_0 - \bar{f}_0\| \le \lambda_f \cdot const$, $\|S_z\| \le const$, $\|W_z\| \le const$ найдем, наконец, с помощью интегральных равенств (12):

если $Q_3(t) \neq 0$, то

$$\|\Delta y\| \le const \cdot \int_0^t \frac{1}{\lambda} \lambda \lambda_f ds \le \lambda_f \cdot const$$

$$\|\Delta z\| \le const \cdot \int_0^t \frac{1}{\lambda} (e^{\frac{s-t}{\lambda C}} + \lambda + e^{\frac{t-T}{\lambda C}}) \lambda_f ds \le \lambda_f \cdot const \cdot (1 + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t-T}{\lambda C}}),$$

если $Q_3(t) \equiv 0$, то $\|\Delta y\| \le \lambda_f \cdot const$, $\|\Delta z\| \le \lambda_f \cdot const$ равномерно на области $0 \le t \le T$, $0 < \lambda \le \Delta$, $0 < \lambda_f \le \Delta$.

Используя выражения (3), (4), (6) и (7), можно получить оценки (8) и (9) и для $\|\Delta u\|$. Теорема доказана.

Заметим, что условие $Q_3(t) \equiv 0$, фигурирующее в теореме, можно заменить на условие $Q_3 = \lambda q_3$, где $q_3 = q_3(t)$ не зависит от λ. Тогда оценки (8) теоремы останутся теми же.

Список использованной литературы

1. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. - М.: Мир, 1972. - 544 с.
2. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций.// Дифференциальные уравнения, 1981, XVII, N9, сс.1574 - 1580.
3. Козырев В.Г. Об асимптотике системы оптимального управления с двумя малыми сингулярно возмущающими параметрами.// Динамические системы: Межвед. науч. сб. Вып. 10. - Киев: “Лыбидь”, 1992, сс.57-63.

Поступила в редколлегию 15.05.99