МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 514.12

А. И. КРИВОРУЧКО, канд. физ.-мат. наук, Симфероп. гос. ун-т

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ

Найдены рациональные инварианты группы G, порожденной отражениями и удовлетворяющей следующему условию: G-орбиты направлений симметрии этой группы бесконечны, а их линейные оболочки образуют тройку плоскостей с попарными нулевыми пересечениями.

В [1–3] и ряде других работ В. Ф. Игнатенко изучается строение и вычисляются инварианты бесконечных групп, порожденных отражениями и действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях в n-мерном вещественном линейном пространстве V. Общая задача редуцируется к вычислению инвариантов *специальной* группы G, удовлетворяющей следующим условиям:

1) Группа порождается объединением q образованных отражениями попарно непересекающихся множеств M_i, каждое из которых определяется некоторой плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i в следующем смысле: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а P сопряжена d относительно φ_i.

2) Ядро каждой квадратичной формы φ_i имеет нулевое пересечение с A_i; сужение φ_i на A_i имеет ненулевое ядро B_i (называемое далее особой плоскостью группы и множества M_i).

3) Если два отражения принадлежат группе и не коммутируют между собой, то они оба содержатся в некотором M_i.

Используемый в [1–3] метод получения базисных инвариантов такой группы не работает в случае, когда ее особые плоскости имеют попарные нулевые пересечения, но не образуют прямой суммы. В [4] предложен метод вычисления базисных инвариантов группы G и в этом случае. Здесь он применяется для вычисления образующих поля рациональных инвариантов группы G с тремя особыми плоскостями.

1°. Пусть H обозначает группу преобразований пространства V, обладающую указанными выше свойствами 1) – 3) группы G; при этом будем предполагать, что $q = 3$, а плоскости B_i имеют нулевые попарные пересечения. Положим $M = \bigcup_{i=1}^{3} M_i$.

Лемма. В пространстве V существует базис

$$\left(a_{ij}, b_{il}, c_k : \;\; 1 \le i \le 3; \;\; 1 \le j \le k_i; \;\; 1 \le l \le s_i; \;\; 1 \le k \le m\right)$$

с соответствующими координатными функциями

$$y_{ij} = a_{ij}^*, \quad z_{il} = b_{il}^*, \quad x_k = c_k^*, \tag{1}$$

для которого

$$B_i = \langle b_{il} : l \ge 1 \rangle \;\; (i \le 2), \qquad B_3 = \left\langle b_{1p} + b_{2p} : \; p \le s \right\rangle \oplus \langle b_{3l} : \; l \ge 1 \rangle,$$

$$A_i = \left\langle a_{ij} : \quad j \ge 1 \right\rangle \oplus B_i, \;\; \varphi_i = h_i \quad \text{для} \quad i \le 2 \quad \text{и} \quad \varphi_3 = h_3 + 2\sum\nolimits_p z_{1p}\theta_p,$$

где $h_i = \sum_{j,l} (\varepsilon_{ij} y_{ij}^2 + 2 z_{il}\xi_{il}) \quad (i \le 3)$, каждый кортеж $(\xi_{1l} : l \ge 1)$, $(\xi_{2l} : l \ge 1)$, $(\xi_{3l}; \theta_p : l \le s_3; p \le s)$ состоит из линейно независимых линейных форм, принадлежащих $\langle x_k : k \ge 1 \rangle$, $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство этой леммы является модификацией доказательства теоремы 10 работы [1].

2°. Зафиксируем в V систему координат (1), удовлетворяющую условиям леммы. Положим $X_0 = \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_m)$, F – поле всех вещественных рациональных функций от переменных (1); F^H – поле рациональных инвариантов группы H;

$$\Delta = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1s} \\ \xi_{21} & \cdots & \xi_{2s} \\ \theta_1 & \cdots & \theta_s \end{pmatrix}.$$

Теорема. F^H в системе координат (1) представимо в виде $X_0(S)$, где S – одна из следующих систем функций (удовлетворяющих соответствующим ограничениям):

a) $h_1, h_2, h_3 \quad (s = 0)$;

b) $h_1\theta_1 + h_3\xi_{11}, h_2\theta_1 + h_3\xi_{21} \quad (s = 1)$;

c) $h_1(\xi_{22}\theta_1 - \xi_{21}\theta_2) + h_2(\xi_{11}\theta_2 - \xi_{12}\theta_1) + h_3(\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21})$ $(s = 2$, строки матрицы Δ не пропорциональны друг другу);

d) $h_1 + \alpha_1 h_3, h_2 + \alpha_2 h_3$ $(s \ge 1, \xi_{ip} = \alpha_i \theta_p$ для всех $i \le 2$ и $p \le s)$;

e) $\sum_{i\le 3}\beta_i h_i$ ($s\le 2$, строки матрицы Δ не пропорциональны друг другу, но $\beta_1\xi_{1p}+\beta_2\xi_{2p}=\beta_3\theta_p$ для всех $p\le s$ и хотя бы один из вещественных коэффициентов β_i отличен от 0);

f) $h_1 f_2 - h_2 f_1 + h_3(\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1)$ ($s\ge 2; \xi_{ip}=\alpha_i\theta_p+\mu_p f_i$ для всех $i\le 2$ и $p\le s$, где α_i – ненулевые вещественные коэффициенты, μ_p – вещественные коэффициенты, хотя бы один из которых отличен от 0, а f_1 и f_2 – неколлинеарные линейные формы);

g) 1 ($s\ge 3$ и хотя бы один минор третьего порядка матрицы Δ отличен от 0).

Доказательство. Для $i\le 3$, $j\le k_i$, $l\le s_i$, $t\in\mathbb{R}$ пусть $T(i,j,l,t)$ – отражение относительно гиперплоскости $\varepsilon_{ij}y_{ij}+t\xi_{il}=0$ в направлении вектора $a_{ij}+tb_{il}$ (здесь и далее "переменные" индексы принимают все допустимые соответствующими ограничениями значения; i,j,k,l,p – целые положительные).

Для любого $\tau=(t_{11},\dots,t_{1k_1},t_{21},\dots,t_{2k_2})$, принадлежащего $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$, отражения $T(i,j,1,t_{ij})$ коммутируют между собой. Пусть T_τ – произведение этих отражений.

Пусть $r=r(\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\bar y_3,\bar z_3,z_{11},z_{12},\bar x)\in F^H$, где $\bar y,\bar y_3,\bar z_1,\bar z_2,\bar z_3,\bar x$ – кортежи переменных y_{ij}, y_{3j} $(i\le 2; j\ge 1)$, z_{1l}, z_{2l} $(l\ge 2)$, z_{3l} $(l\ge 1)$, x_k $(k\ge 1)$ соответственно. Из инвариантности r относительно T_τ получаем в поле $F(t_{ij}: i\le 2; j\ge 1)$ равенство

$$r=r(\bar y',\bar z_1,\bar z_2,\bar y_3,\bar z_3,z'_{11},z'_{12},\bar x),\tag{2}$$

где $\bar y'=(y'_{ij}: i\le 2; j\ge 1)$, z'_{11} и z'_{12} определяются координатным представлением отображения T_τ и зависят от t_{ij}. Полагая в (2) $t_{ij}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\xi_{i1}^{-1}y_{ij}$, для $R_i=z_{i1}+\frac{1}{2}\xi_{i1}^{-1}\sum_j\varepsilon_{ij}y_{ij}^2$ имеем:

$$r=r(\bar 0,\bar z_1,\bar z_2,\bar y_3,\bar z_3,R_1,R_2,\bar x)\ .\tag{3}$$

Если некоторое $s_i\ge 1$, то для каждого $l\le s_i$ положим $\varphi_l^{2t}=T(i,1,l,t)\cdot T(i,1,l,0)$. Тогда $(\varphi_{il}^t: t\in\mathbb{R})$ – однопараметрическая группа с производящим оператором $B_{il}=(\frac{d}{dt}\varphi_{il}^t)\big|_{t=0}$.

Пусть $s_1 \geq 2$. Для любого $(t_i : 2 \leq i \leq s_1)$, где $t_i \in \mathbb{S}$, из инвариантности r относительно $\exp[\varepsilon_{11} B_{11}, \sum_{i \geq 2} t_i B_{1i}]$ и из (3) получаем в $F(t_2, \ldots, t_{s_1})$ равенство

$$r = r(\overline{0}, \overline{z}_1', \overline{z}_2, \overline{y}_3, \overline{z}_3, R_1', R_2, \overline{x}), \tag{4}$$

где $\overline{z}_1' = (z_{1l} + t_l \xi_{11} : l \geq 2)$, $R_1' = R_1 - \sum_{i \geq 2} t_i \xi_{1i}$. Полагая в (4) $t_i = -\xi_{11}^{-1} z_{1i}$ $(i \geq 2)$, получим: $r = r(\overline{0}, \overline{z}_2, \overline{y}_3, \overline{z}_3, \frac{1}{2} h_1 \xi_{11}^{-1}, R_2, \overline{x})$.

Аналогичным образом, если и $s_2 \geq 2$ то

$$r = r(\overline{0}, \overline{y}_3, \overline{z}_3, \frac{1}{2} h_1 \xi_{11}^{-1}, \frac{1}{2} h_2 \xi_{21}^{-1}, \overline{x}). \tag{5}$$

Из (3) следует, что (5) выполняется при любых s_1 и s_2.

Предположим, что $s = 0$. Тогда $s_3 > 0$ и из инвариантности r относительно отражений, принадлежащих M_3,

$$r = r(\overline{0}, \overline{z}_3', \frac{1}{2} h_1 \xi_{11}^{-1}, \frac{1}{2} h_2 \xi_{21}^{-1}, \overline{x}), \tag{6}$$

где $\overline{z}_3' = (\frac{1}{2} h_3 \xi_{31}^{-1}, 0, \ldots, 0)$. Из (6) и инвариантности (при $s = 0$) форм h_i и x_k относительно отражений, принадлежащих M, получаем, что эти формы – образующие (над $\mathbb{S}$) поля рациональных инвариантов группы H.

Пусть теперь $s \geq 1$. Обозначим через $T(j, p, t)$ отражение относительно плоскости $\varepsilon_{3j} y_{3j} + t\theta_p = 0$ в направлении $a_{3j} + t(b_{1p} + b_{2p})$. Положим $\overline{\overline{\psi}}_p^{2t} = T(1, p, t) \cdot T(1, p, 0)$. Тогда ($\overline{\overline{\psi}}_p^{t} : t \in \mathbb{S}$) – однопараметрическая группа. Пусть B_p – ее производящий оператор.

Для любого $\tau = (t_1, \ldots, t_{k_3}) \in \mathbb{S}^{k_3}$ отражения $T(j, 1, t_j)$ комму-ти-руют между собой. Пусть $T_{3\tau}$ – произведение этих отражений. Из инвариантности r относительно $T_{3\tau}$ и (5) получаем

$$r = r(\overline{0}, \overline{y}_3', \overline{z}_3, \frac{1}{2} h_1' \xi_{11}^{-1}, \frac{1}{2} h_2' \xi_{21}^{-1}, \overline{x}), \tag{7}$$

где $\overline{y}_3' = (y_{3j}' : j \geq 1)$ определяется координатным представлением отображения $T_{3\tau}$ и зависит от t_k, а $h_i' = h_i - 4\xi_{i1} \sum_k t_k (y_{3k} + t_k \varepsilon_{3k}^{-1} \theta_k)$.

Полагая в (7) $t_j = -\frac{1}{2}\varepsilon_{3j}\theta_1^{-1}y_{3j}$ $(j \ge 1)$, имеем:

$$r = r(\overline{0}, \bar{z}_3, F_1, F_2, \bar{x}), \tag{8}$$

где $2F_i = h_i \xi_{i1}^{-1} + \theta_1^{-1}\sum_j \varepsilon_{3j} y_{3j}^2$. При этом если $s_3 > 0$, то, как и выше, используя инвариантность r относительно экспонент коммутаторов производящих операторов B_1 и B_{3l} для $l \ge 1$, из (8) получаем:

$$r = r(\overline{0}, \frac{1}{2}(h_1\xi_{11}^{-1} + h_3\theta_1^{-1}), \frac{1}{2}(h_2\xi_{21}^{-1} + h_3\theta_1^{-1}), \bar{x}). \tag{9}$$

Последнее равенство совпадает с (8) при $s_3 = 0$ и поэтому верно при любом s_3.

Если $s = 1$, то формы $h_1\theta + h_3\xi_{11}$, $h_2\theta_1 + h_3\xi_{21}$, x_k инвариантны относительно отражений, принадлежащих M, и, как следует из (11), являются образующими поля F^H.

Пусть $s \ge 2$. Для каждых $i \le 2$ и $p \le s$ положим $K_{ip} = \xi_{i1}\theta_p - \xi_{ip}\theta_1$.

Для любого $p \ge 2$ из инвариантности r относительно $\exp[t\varepsilon_{31}B_1, B_p]$, учитывая (9) и полагая $h_{ip} = h_i - 2tK_{ip}$ $(i \le 2)$, получим

$$r = r(\overline{0}, \frac{1}{2}(h_{1p}\xi_{11}^{-1} + h_3\theta_1^{-1}), \frac{1}{2}(h_{2p}\xi_{21}^{-1} + h_3\theta_1^{-1}), \bar{x}). \tag{10}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $K_{ip} = 0$ для всех $i \le 2$ и $p \le s$.

Отсюда $\xi_{ip} = \alpha_i\theta_p$, $\alpha_i \ne 0$ $(i \le 2; p \le s)$. При этих условиях формы $h_i + \alpha_i h_3$, x_k $(i \le 2$ и $k \le m)$ инвариантны относительно отражений, принадлежащих M, и, как следует из (10), являются образующими поля F^H.

2. $K_{ip} \ne 0$ для некоторых $i \le 2$ и $p \le s$.

Пусть, например, $K_{12} \ne 0$. Полагая в (10) $2t = (h_1 + h_3\xi_{11}\theta_1^{-1})K_{12}^{-1}$, получаем

$$r = r(\overline{0}, \frac{1}{2}R_3K_{12}^{-1}\xi_{21}^{-1}, \bar{x}), \tag{11}$$

где

$$R_3 = h_2K_{12} - h_1K_{22} + h_3(\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}). \tag{12}$$

2.1. $s=2$. Тогда формы R_3, x_k инвариантны относительно отражений, принадлежащих M, и, как следует из (11), являются образующими поля F^H.

2.2. $s\geq 3$. Положим $\Delta_p=\begin{vmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{1p}\\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{2p}\\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_p\end{vmatrix}$. Для каждого $p\leq 3$ из инвариантности r относительно $\exp[t\varepsilon_{31}B_1, B_p]$ получаем

$$r=r(\overline{0},\frac{1}{2}K_{12}^{-1}\xi_{21}^{-1}R_{3p}(t),\bar{x}),\tag{13}$$

где $R_{3p}(t)=R_3-2t\theta_1\Delta_p$.

2.2.1. Некоторое $\Delta_p\neq 0$. Тогда соответствующее $R_{3p}(t)$ зависит от t и из (13) получаем, что $F^H=X_0$.

2.2.2. $\Delta_p=0$ для всех $p\leq s$.

Это возможно лишь в следующих двух случаях [4].

1) $\xi_{2p}=\alpha\xi_{1p}+\beta\theta_p$ $(p\leq s)$, где α,β – вещественные коэффициенты, хотя бы один из которых отличен от 0. Тогда $R_3=$ $=(h_2-\alpha h_1+\beta h_3)K_{12}$, причем формы $h_2-\alpha h_1+\beta h_3, x_k$ инвариантны относительно отражений, принадлежащих M, и, как следует из (11), являются образующими поля F^H.

2) $\xi_{ip}=\alpha_i\theta_p+\mu_p f_i$ $(i\leq 2; p\leq s)$, где α_i – ненулевые вещественные константы, μ_p – вещественные константы, хотя бы одна из которых отлична от 0, а f_1 и f_2 – линейные формы. Теперь
$K_{i2}=f_i(\mu_1\theta_2-\mu_2\theta_1)$, $f_1\neq 0$, $R_3=(f_1h_2-f_2h_1+(\alpha_2f_1-\alpha_1f_2)h_3)K_{12}f_1^{-1}$, и формы $f_1h_2-f_2h_1+(\alpha_2f_1-\alpha_1f_2)h_3$, x_k являются образующими поля F^H. Можно считать, что f_1 и f_2 неколлинеарны, т.к. иначе получаем уже рассмотренный выше случай.

Замечание 1. При $s=1$ поле рациональных инвариантов, определяемое образующими d), принадлежит классу полей, определяемых образующими b). При $s=2$ поля, определяемые любой из образующих e), f), принадлежат классу полей, определяемых образующими c). Во всех остальных случаях образующие a) – g) определяют попарно непересекающиеся классы полей рациональных инвариантов.

Замечание 2. За счет замены координат $\tilde{y}_{ij}=\sqrt{|\varepsilon_{ij}\lambda_i|}\,y_{ij}$ $(i\geq 1; j\geq 1)$, где $\lambda_i=1$, можно считать $|\varepsilon_{ij}|=1$ для всех образующих

a) – g). При этом для d) и f), полагая $\lambda_3 = 1$, $\lambda_k = \alpha_k^{-1}$ $(k \le 2)$, можно считать, что и $\alpha_k = 1$. Для e) после аналогичной замены и изменения нумерации множеств M_i можно считать, что $\beta_3 = 1, \beta_k \in \{0;1\}$ $(k \le 2)$. Для f) после указанной в [4] замены координат можно считать, что и $\mu_1 = 1, \mu_p = 0$ для всех $p \ge 2$.

Определение. Множество рациональных инвариантов группы G называется вырожденным, если оно содержится в $\mathbb{S}(y_2,...,y_n)$ при некотором выборе в V линейных координат $y_1, y_2,..., y_n$.

Геометрическим эквивалентом вырожденности поля рациональных инвариантов группы G является цилиндричность всех G-инвариантных алгебраических поверхностей.

Следствие. Пусть H – подгруппа специальной группы $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} M_i \right\rangle$, $k \ge 3$ и поле F^G невырождено. Тогда либо F^H имеет одну из систем образующих a), b), d), f), с соответствующими этим образующим ограничениями, причем в случае f) хотя бы одна из форм f_i не принадлежит $\langle \xi_{il} : l \ge 1 \rangle$, либо $s = 2$ и формы K_{12}, K_{22} взаимно просты, либо G является подгруппой специальной группы, сохраняющей все инварианты группы G и имеющей $\le k-2$ особых плоскостей.

Доказательство. Пусть F^H имеет образующую c), $K_{12} \ne 0$ и K_{12}, K_{22} не взаимно просты. Тогда возможны лишь следующие случаи.

1. $K_{22}K_{12}^{-1} = \alpha \in \mathbb{S}$. Отсюда $(\xi_{21} - \alpha\xi_{11})\theta_2 = (\xi_{22} - \alpha\xi_{12})\theta_1$. Но θ_1 и θ_2 неколлинеарны и поэтому $\xi_{2i} - \alpha\xi_{1i} = \beta\theta_i$, т.е. получаем e).

2. $K_{22}K_{12}^{-1} = f_2 f_1^{-1}$, где f_1 и f_2 – неколлинеарные линейные формы, и тогда $(\xi_{21}f_1 - \xi_{11}f_2)\theta_2 = (\xi_{22}f_1 - \xi_{12}f_2)\theta_1$. Теперь

$$\xi_{2i}f_1 - \xi_{1i}f_2 = \theta_i f_3 \quad (i \le 2), \tag{14}$$

где f_3 – некоторая линейная форма.

Если $f_3 = \alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2$, то из (14) получаем f).

Предположим теперь, что формы f_1, f_2, f_3 линейно независимы. Тогда из (14)

$$\begin{pmatrix} \xi_{1i} \\ \xi_{2i} \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i & -\beta_i \\ -\alpha_i & 0 & \gamma_i \\ \beta_i & -\gamma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} \qquad (i \le 2),$$

$(z_{21}\xi_{21}+z_{22}\xi_{22})f_1-(z_{11}\xi_{11}+z_{12}\xi_{12})f_2=\tilde{z}_1 f_2 f_3+\tilde{z}_2 f_1 f_3+\tilde{z}_3 f_1 f_2$, где $\tilde{z}_1=\beta_1 z_{11}+\beta_2 z_{12}$, $\tilde{z}_2=\gamma_1 z_{21}+\gamma_2 z_{22}$, $\tilde{z}_3=\alpha_1(z_{11}-z_{21})+\alpha_2(z_{12}-z_{22})$, и из (12) получаем: $R_3=2(\tilde{z}_1 f_2 f_3+\tilde{z}_2 f_1 f_3+\tilde{z}_3 f_1 f_2+f)K_{12} f_1^{-1}$, где многочлен f принадлежит F и не зависит от z_{il} $(i,l\le 2)$. Но тогда из (11) следует, что F^H вырождено (см. [4]).

Остается отметить, что в случае е) все рациональные инварианты группы G принадлежат F^H и сохраняются отражениями, принадлежащими содержащему M множеству отражений, которое определяется плоскостью $\sum_{i\le 3} A_i$ и квадратичной формой $\sum_{i\le 3}\beta_i h_i$.

Работа поддержана Миннауки Украины, грант 1.4/121.

Список использованной литературы

1. Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техн.ВИНИТИ. Пробл.геометрии. М.,1989. – т.21. – С.155-208.
2. Игнатенко В.Ф., Дибан Иссам. Об алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Динамические системы.1993.Вып.12. – С.69-94.
3. Игнатенко В.Ф.О современном состоянии теории инвариантов бесконечных групп косых отражений // Труды математического факультета. Изд. Симфероп. ун-та, 1997. – С.54-61.
4. Криворучко А.И. О кольцах инвариантов групп, порожденных тремя орбитами отражений // Симферополь, 1995. – 14 с. – Деп.в ГНТБ Украины, № 2075 – Ук95.

Поступила в редколлегию 12.04.99

