УДК 517.432

С. А. КУЖЕЛЬ, канд. физ.-мат. наук, Ин-т математики НАН Украины

О СВОБОДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ В СХЕМЕ ЛАКСА-ФИЛЛИПСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получены необходимые и достаточные условия при которых дифференциально-операторное уравнение определяет свободную еволюцию в схеме рассеяния Лакса-Филлипса.

1. Постановка задачи. Известно [1], что использование схемы рассеяния Лакса-Филлипса для изучения возмущений в ограниченной области классического волнового уравнения позволяет получить важные результаты о связи между сингулярностями матрицы рассеяния и характером возмущения. В связи с этим является актуальной задача построения подобной схемы для эволюционной системы, что задаётся дифференциально-операторным уравнением

$$u_{tt} = -Lu, \tag{1}$$

где L – абстрактный положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Понятно, что одним из принципиальных моментов при решении такой задачи является естественное определение условий на оператор L при которых уравнение (1) задаёт свободную эволюцию. Напомним [1], что в теории рассеяния Лакса-Филлипса уравнение (1) задает свободную эволюцию, если группа $W_L(t)$ решений задачи Коши этого уравнения имеет в пространстве данных Коши H уходящее D_+ и приходящее D_- подпространства с дополнительным свойством

$$D_- \oplus D_+ = H\,. \tag{2}$$

Полагая в (1) $L = -\Delta,\ D(\Delta) = W_2^2(R^n)$, мы получаем классическое волновое уравнение в R^n, (n - нечетное). В [1] показано, что это уравнение определяет свободную эволюцию в схеме рассеяния Лакса-Филлипса и подпространства D_+ и D_- совпадают с замыканием в пространстве данных H множеств данных Коши решений $u(x,t)$ волнового уравнения $u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t)$, которые обращаются в нуль при

$|x|<t$ и $|x|<-t$, соответственно. Отметим, что эти подпространства связаны соотношением

$$JD_{-}=D_{+}, \tag{3}$$

где J – оператор обращения времени [2, стр. 63] в пространстве H.

Ясно, что существование таких подпространств для классического волнового уравнения в пространствах нечетной размерности связано с определенными свойствами самосопряженного в $L_2(R^n)$ свободного Лапласиана $-\Delta$, $D(\Delta)=W_2^2(R^n)$.

В работе автора [3] этот вопрос был изучен для общего случая абстрактного дифференциально-операторного уравнения (1) и показано, что достаточным условием существования для группы $W_L(t)$ решений этого уравнения уходящего и приходящего подпространств с дополнительными свойствами (2), (3) является следующее свойство самосопряженного оператора L:

В пространстве X существует такой простой максимальный симметрический оператор B, что

$$L\supset B^2 \quad \text{и} \quad (Lu,u)=\|B^*u\|^2 \quad (\forall u\in D(L)). \tag{4}$$

Любой самосопряженный оператор L, удовлетворяющий условиям (4) будем называть *невозмущенным оператором.*

Таким образом, если оператор L в правой части уравнения (1) является невозмущенным, то это уравнение определяет свободную эволюцию в теории рассеяния Лакса-Филлипса.

Отметим, что свойство невозмущенности оператора L зависит от выбора простого максимального симметрического оператора B. В частности, в [3] указан вид оператора B в пространстве $L_2(R^n)$, для которого свободный Лапласиан $L=-\Delta$ является невозмущенным. Таким образом, задавая оператор B в различных функциональных пространствах, можно получать [4] конкретные реализации свободных эволюций в теории рассеяния Лакса-Филлипса.

В настоящей заметке мы докажем обратное утверждение:

Т е о р е м а**.** Если для группы решений $W_L(t)$ задачи Коши уравнения (1) существуют в пространстве данных Коши H приходящее D_{-} и уходящее D_{+} подпространства с дополнительными свойствами (2), (3), то оператор L в правой части уравнения (1) является невозмущенным.

Таким образом, свойство невозмущенности оператора L в правой части уравнения (1) является необходимым и достаточным для того, чтобы это уравнение определяло свободную эволюцию в теории рассеяния Лакса-Филлипса.

2. Вспомогательные определения. Пусть L произвольный положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Пополнение области определения $D(L)$ этого оператора по норме $\| u \|_L^2 = (Lu, u)$ обозначим через X_L.

Гильбертово пространство $H = \mathrm{X}_L \oplus \mathrm{X}$ будем называть *пространством данных Коши* для уравнения (1). Елементы этого пространства удобно обозначать в виде упорядоченых пар $< u, v >$, где первая компонента принадлежит пространству X_L, а вторая - пространству X.

Положим $v = u_t$ и перепишем уравнение (1) в виде $\partial_t < u, v >= Q < u, v >$, где

$$Q < u, v >=< v, -Lu >, \quad D(Q) = \{< u, v >| \, u \in D(L), v \in D(L\})\}. \tag{5}$$

Рассуждая аналогично [2], нетрудно убедиться в том, что кососамосопряженное замыкание Q_L оператора Q является генератором унитарной в H группы решений задачи Коши $W_L(t)$ уравнения (1).

В пространстве H определим оператор обращения времени

$$J < u, v >=< u, -v > . \tag{6}$$

3. Доказательство теоремы. Пусть $D_\pm$ – уходящее и приходящее подпространства для групы $W_L(t)$ с дополнительным свойством (2). Тогда [1], существует такое изометрическое отображение T пространства данных Коши H на $L_2(R, N)$ (N – вспомогательное гильбертово пространство), что

$$TQ_L = -\frac{d}{ds}T \qquad (TD(Q_L) = W_2^1(R, N)), \tag{7}$$

$$TD_- = L_2(R_-, N), \qquad TD_+ = L_2(R_+, N). \tag{8}$$

В силу (5) и (6) оператор J антикоммутирует с Q_L. Поэтому,

$$\frac{d}{ds}\widetilde{J} = -\widetilde{J}\frac{d}{ds}, \quad \widetilde{J} : W_2^1(R, N) \to W_2^1(R, N), \tag{9}$$

где $\widetilde{J} = TJT^{-1}$. В $L_2(R, N)$ рассмотрим унитарный оператор

$$\Psi f(s) = f(-s), \quad \forall f(s) \in L_2(R, N). \tag{10}$$

Понятно, что

$$\frac{d}{ds}\Psi = -\Psi\frac{d}{ds}, \quad \Psi : W_2^1(R,N) \to W_2^1(R,N). \tag{11}$$

В силу (9) и (11) унитарный в $L_2(R,N)$ оператор $\Psi\widetilde{J}$ коммутирует с d/ds. Следовательно, этот оператор коммутирует с оператором сдвига в $L_2(R,N)$. При этом, из равенств (3), (8) и (10) получаем

$$\Psi\widetilde{J} : L_2(R_-,N) \to L_2(R_-,N), \quad \Psi\widetilde{J} : L_2(R_+,N) \to L_2(R_+,N). \tag{12}$$

Такие свойства оператора $\Psi\widetilde{J}$ означают (см. [1]), что в спектральном представлении этот оператор может быть записан как оператор умножения на целую сжимающую операторнозначную функцию $E(z)$, значениями которой на действительной прямой являются унитарные операторы в N. В силу теоремы Лиувилля это возможно лишь при $E(z) = E$ $(\forall z \in C)$, где E унитарный в N оператор. Следовательно, $\Psi\widetilde{J}f(s) = Ef(s)$ при всех $f(s) \in L_2(R,N)$. Отсюда, с учетом (10), получаем

$$\widetilde{J}f(s) = Ef(-s). \tag{13}$$

Отметим, что оператор $\widetilde{J}$ является самосопряженным и унитарным в пространстве $L_2(R,N)$. С учетом (13) это означает, что E – унитарный и самосопряженный оператор в N. Принимая этот факт во внимание, на основе (6) и (13) получаем, что

$$T(0 \oplus \mathrm{X}) = (I - \widetilde{J})L_2(R,N) = \{f(s) - Ef(-s) \mid \forall f(s) \in L_2(R_+,N)\}. \tag{14}$$

Используя (14) непосредственно проверяется, что оператор

$$T_+u = \frac{1}{\sqrt{2}}P_+(T < 0, u >)(s),$$

где P_+ ортопроектор в $L_2(R,N)$ на $L_2(R_+,N)$, изометрически отображает пространство X на $L_2(R_+,N)$. Используя этот оператор определим в X простой максимальный симметрический оператор

$$B = iT_+^{-1}\frac{d}{ds}T_+, \quad D(B) = T_+^{-1}\overset{0}{W}{}_2^1(R_+,N). \tag{15}$$

Покажем, что при таком выборе оператора B оператор L является невозмущенным. Действительно, из (15) следует, что

$$D(B^{*2}) = T_+^{-1} W_2^2(R_+, N) \quad \text{и} \quad T_+ B^{*2} = -\frac{d^2}{ds^2} T_+ \ . \tag{16}$$

Заметим, что силу (5) и (7), при всех $u \in D(L)$ справедливо равенство

$$T < 0, u > \in W_2^2(R, N) \cap (I - \widetilde{J}) L_2(R, N). \tag{17}$$

Поэтому, принимая во внимание равенства (7) и (16), мы получаем

$$T_+ Lu = -\frac{1}{\sqrt{2}} P_+ T Q_L^2 < 0, u > = -\frac{d^2}{ds^2} T_+ u = T_+ B^{*2} u. \tag{18}$$

Следовательно, $L \subset B^{*2}$. Отсюда, с учетом самосопряженности оператора L получаем, что $L \supset B^2$. Равенство $(Lu, u) = \| B^* u \|^2$ вытекает из изометричности оператора T и равенств (17), (18). Итак, оператор L является невозмущенным.

Список использованой литературы

1. Lax P., Phillips R. Scattering theory. New York: Academic Press, 1969.–282p.
2. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния для автоморфных функций: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1979.- 324 с.
3. Kuzhel S. On some properties of abstract wave equation // Methods of Functional Analysis and Topology.-1997.- 3, 1.- P. 82-87.
4. Kuzhel A., Kuzhel S. Regular extensions of Hermitian operators.- Utrecht: VSP, 1998.- 273 p.

Поступила в редколлегию 18.03.99

