УДК 539.3

А. Р. СНИЦЕР, канд. физ.-мат. наук, Симфероп. гос. ун-т

ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Исследованы волны кручения на цилиндрической полости в упругой полубесконечной среде. Волны вызваны стационарными крутильными колебаниями сцепленного с полупространством плоского кругового штампа. Изложена техника контурного преобразования интегралов, возникающих в подобных задача. Приведен алгоритм и результаты численных расчетов зависимости модуля комплексной амплитуды вектора перемещений на цилиндрической поверхности от вертикальной координаты как в ближней, так и в дальней зоне.

В задачах о вынужденном движении полубесконечной сплошной и слоистой упругой среды большой интерес представляет распределение в ней волнового поля. На его формирование влияет способ возбуждения волн, граница, физические свойства среды и другие факторы. Изучение их влияния на характер поля может позволить решать, имеющие важное практическое значение, обратные задачи, т.е. по известному волновому полю судить о его источниках, геометрии и физических свойствах среды.

Наиболее простыми в этом плане являются задачи о вынужденном движении упругого полупространства под действием приложенных на его границе гармонических нагрузок. Задачи такого типа рассматривались во многих работах. В частности в работе [2] подробно изложены результаты исследования закономерностей распространения волн и проведен глубокий количественный и качественный анализ стационарных волновых полей в упругих средах указанной геометрии. Приведенные аналитические выражения для волновых полей получены методом контурных преобразований интегралов в комплексной плоскости. Эти решения удовлетворяют физическим требованиям и обеспечивают единственность решения задач. Качественный характер полей в дальней зоне получен асимптотической оценкой контурных интегралов методом наибыстрейшего спуска. Однако, как отмечается в [2], математическая сложность указанных задач не позволяет провести сколь-нибудь подробный количественный анализ волнового поля вблизи приложения нагрузки (ближнего поля).

Данная статья посвящена количественному анализу волнового поля как вблизи, так и вдали от источника возбуждения. Рассматриваемая нами полубесконечная упругая среда $z \geq 0$ содержит вертикальную свободную от напряжений цилиндрическую выемку радиуса

a. Рассчитывается поле волн кручения на цилиндрической поверхности в зависимости от координаты z.

Волны возбуждаются крутильными колебаниями сцепленного с полупространством плоского кругового штампа радиуса b вокруг оси полости проходящей через центр штампа. Колебания штампа вызваны воздействием на него гармонического во времени крутильного момента $\operatorname{Re} M_0 \exp(i\omega t)$. Отметим, что в подобных задачах, рассмотренных ранее в работах [7,8] исследовались амплитудно- и фазово-частотные характеристики колебаний штампа, контактные напряжения и средняя за период мощность излучаемая в полупространство.

Воспользуемся результатами решения динамической контактной задачи о крутильных колебаниях штампа на полупространстве с цилиндрической полостью [7]. Следуя этой работе запишем выражение для угловой компоненты вектора перемещений:

$$U_\varphi = -\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \frac{\xi}{\kappa(\xi)}\bar{\tau}(\xi)\frac{\chi(\xi,r)}{\left|H_2^{(1)}(\xi a)\right|^2}\exp[-z\kappa(\xi)]d\xi, \qquad (1)$$

где: $\chi(\xi,r) = Y_1(\xi r)J_2(\xi a) - J_1(\xi r)Y_2(\xi a)$ – ядро преобразований Вебера; $J_n(x)$, $Y_n(x), H_n^{(1)}(x)$ – цилиндрические функции 1-го, 2-го и 3-го рода. $\kappa(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k^2}$, $k = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$ – волновое число поперечных упругих волн; ω – циклическая частота, ρ – плотность среды, μ – модуль сдвига. Ветвь радикала $\kappa(\xi)$ выбирается так, что (1) с учетом временного множителя $e^{i\omega t}$ при $z \to \infty$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда [3] , если $0<\xi<k$ и затухает на бесконечности если $\xi > k$.

В (1), $\bar{\tau}(\xi)$ выражается через решение $\omega(s)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, к которому сводилась динамическая контактная задача:

$$\bar{\tau}(\xi) = -\frac{M_0}{\xi a^2 \Delta(\beta,\Omega)}\left[\int_0^\beta \sqrt{s}\,\omega(s) J_0(\xi s)ds - \sqrt{\beta}\, J_0(\xi\beta)\right] \qquad (2)$$

где

$$\Delta(\beta,\Omega) = \int_0^\beta \sqrt{s}\,\omega(s)E(s)ds - \sqrt{\beta}\,E(\beta),$$

$$E(s)=\pi^2 - M\,\frac{\Omega^2 p^3}{\pi\, a}\int_0^{\infty}\frac{J_0(\xi\,\beta)\;J_0(\xi\,s)}{\xi\,\kappa(\xi)\,\left|H_2^{(1)}(\xi\,a)\right|^2}\,d\,\xi\ , \tag{3}$$

здесь $p=b/a$, $M=m/\rho\, b^3$, $\beta=b-a\,, m$ – масса штампа, $\Omega=kb$ – приведенная частота.

После подстановки (2),(3) в (1) и изменения порядка интегрирования, получим:

$$U_\varphi(r,z)=\frac{M_0}{\mu\ a^2\,\Delta(\beta,\Omega)}\left[\int_0^{\beta}\sqrt{s}\,\omega(s)\,X(r,z,s)\ ds\ -\ \sqrt{\beta}\ X(r,z,\beta)\right], \tag{4}$$

где

$$X(r,z,s)=\int_0^{\infty}\frac{J_0(\xi\,s)\,\chi(\xi,r)}{\kappa(\xi)\,\left|H_2^{(1)}(\xi\,a)\right|^2}\exp\left[-z\,\kappa(\xi)\right]d\,\xi\,. \tag{5}$$

Вычислим интеграл (5), полагая $r=a,$ при этом в силу формул Ломеля [5]: $\chi(\xi,a)=\dfrac{2}{\pi\,\xi\,a}$. Перейдем в комплексную плоскость $\zeta=\xi\ +i\eta$ и представим подынтегральное выражение в (5) как сумму функций комплексной переменной:

$$F_m(\zeta)=\frac{e^{-z\kappa(\zeta)}}{\pi\,\zeta\,a\,\kappa(\zeta)}\cdot\frac{H_0^{(m)}(\zeta\,s)}{H_2^{(m)}(\zeta\,a)\left[2J_2(\zeta\,a)-H_2^{(m)}(\zeta\,a)\right]},\quad (m=1,2) \tag{6}$$

определенных на двух листах римановой поверхности, склеенных по разрезам $\operatorname{Re}\kappa(\zeta)=0$, выходящим из точек ветвления $\zeta=\pm(k-i\,k')$ двузначного радикала $\kappa(\zeta)$ и уходящих в точки $\zeta=\mp i\,\infty\pm 0$. Чтобы удовлетворить условиям излучения, выбираем лист, на котором $\operatorname{Re}\kappa(\zeta)>0$. Как и в [7] используется метод предельного поглощения [9] – введение малого затухания в среду посредством мнимой добавки $-ik'(0<k'<<1)$.

Рассмотрим сумму контурных интегралов:

$$\sum_{m=1}^{2}\int_{L_m}F_m(\zeta)d\zeta=2\pi\, i\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m-1}\operatorname{Res}F_m(\zeta_m)\,. \tag{7}$$

Замкнутые контуры L_1, L_2 в (7), расположены соответственно в 1-м и 4-м квадрантах комплексной плоскости и показаны на рис.1. Контуры состоят из малых $|\zeta| = \varepsilon$ и больших $|\zeta| = R$ дуг окружностей соединенных отрезками действительной и мнимой осей. Контур L_2 содержит петлю, обходящую точку ветвления $\zeta = k - ik'$ вдоль берегов разреза $\xi\eta = -kk'$.

Функции $F_m(\zeta)$ имеют простые комплексные полюса $\zeta_1 = \zeta_0 = 0.42948496 + \mathrm{i}1.28137380$ и $\zeta_2 = \bar{\zeta}_0$, являющиеся нулями функций Ханкеля: $H_2^{(2)}(\zeta_0) = 0$ – в 1-м квадранте и $H_2^{(1)}(\bar{\zeta}_0) = 0$ – в 4-м квадранте. Указанные нули нетрудно получить, зная комплексные нули функции Макдональда $K_2(\zeta)$ [4].

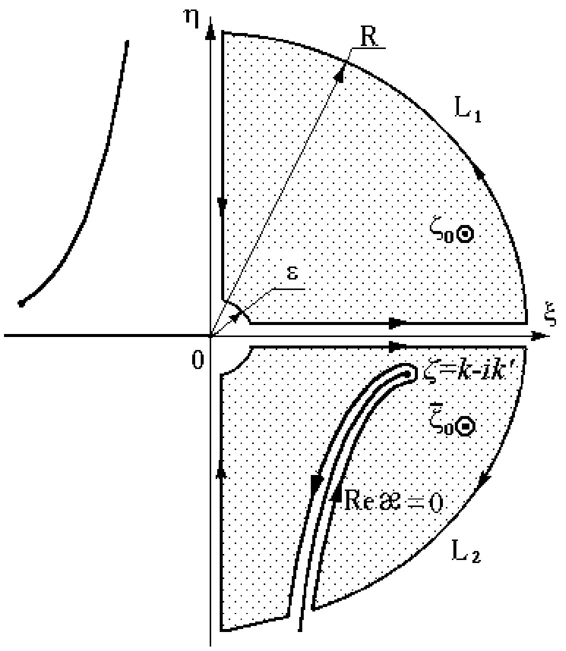

Рис. 1

В результате предельного перехода $|\zeta| = \varepsilon \to 0$, в силу ограниченности функции (6) в нуле интегралы по малым дугам обратятся в нуль. При $|\zeta| = R \to \infty$, в силу известной леммы [6], из выполнения условия $\lim\limits_{|\zeta| \to \infty} \zeta F_m(\zeta) = 0$ следует равенство нулю интегралов по большим дугам.

Переход к среде без затухания $(k' \to 0)$ приводит к перемещению точки ветвления $\zeta = k - ik'$ на действительную ось в точку $\xi = k$ и к деформации разреза, который займет отрезок $0 \le \xi \le k$ вещественной оси и отрицательную часть $\eta < 0$ – мнимой. Расписывая интеграл по петле вокруг разреза с учетом его предельной формы и знаков $\mathrm{Im}\,\kappa(\zeta)$ на берегах разреза из (7) получим:

$$-a\,X(a,z,s) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{K_0(\eta s)}{K_2(\eta a)} \left[\frac{\pi I_2(\eta a) \sin\left(z\sqrt{\eta^2 + k^2}\right) + K_2(\eta a) \cos\left(z\sqrt{\eta^2 + k^2}\right)}{\pi^2 I_2^2(\eta a) + K_2^2(\eta a)} \right] \frac{\eta^{-1}\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2}} +$$

$$+\frac{2i}{\pi}\int_0^k \frac{H_0^{(2)}(\xi s)\cos\left(z\sqrt{k^2-\xi^2}\right)}{\xi\sqrt{k^2-\xi^2}\left[J_2^2(\xi a)+Y_2^2(\xi a)\right]}d\xi\, + \tag{8}$$

$$+\pi\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\exp[-z\kappa(\zeta_0)]}{\kappa(\zeta_0)}H_0^{(1)}(\zeta_0 s)\right\}\ .$$

При вычислении вычетов функции $F_m(\zeta)$ использовался Вронскиан уравнения Бесселя для линейно независимых решений $H_2^{(m)}(\zeta)$:

$$H_2^{(1)}(\zeta)\frac{d\,H_2^{(2)}(\zeta)}{d\zeta}-H_2^{(2)}(\zeta)\frac{d\,H_2^{(1)}(\zeta)}{d\zeta}=-\frac{4i}{\pi\zeta}$$

и соотношения между цилиндрическими функциями комплексного аргумента – $Z_n(\bar{\zeta}_0)=\overline{Z(\zeta_0)}$, а также соотношение – $\kappa(\bar{\zeta}_0)=\overline{\kappa(\zeta_0)}$.

Исследуем зависимость комплексной амплитуды вектора перемещений (4) на поверхности полости $(r=a)$ от координаты z. Будем полагать, что перемещения вызваны колебаниями безынерционного штампа, так что безразмерная масса в (3) полагается нулевой – $M=0$.

Для проведения соответствующих расчетов перейдем в выражениях (3), (4) и (8) от переменных $s\in[0;\beta]$, $z\in[0;\infty)$ с размерностью $[s]=[z]=\text{м}^{-1}$ – к безразмерным переменным $\sigma\in[0;1]$, $\bar{z}\in[0;\infty)$, полагая $s=\sigma\beta$, $\bar{z}=z/a$. Тогда $\Delta(\beta,\Omega)$ в (2) примет вид:

$$\Delta(\beta,\Omega)=\pi^2\sqrt{\beta}\,\Delta_0(\beta_0,\Omega),\qquad \Delta_0(\beta_0,\Omega)=\beta_0\int_0^1\sqrt{\sigma}\;w(\sigma)d\sigma\;-1\,, \tag{9}$$

и после подстановки (9) в (4) для безразмерного перемещения получим:

$$U_\varphi(a,\bar{z})=\frac{M_0}{\mu a^2\pi^2\Delta_0}\left[\beta_0\int_0^1\sqrt{\sigma}\,w(\sigma)X(a,\bar{z},\sigma)d\sigma\;-\;X(a,\bar{z},1)\right], \tag{10}$$

где $\beta_0=\dfrac{\beta}{a}$, $w(\sigma)=a\,\omega(s)$ – решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметричным ядром $V(t,\beta)$ задачи Рейснера-Сагоци для упругого полупространства с вертикальной цилиндрической полостью, полученное в работе [7] :

$$\omega(t) + \int_0^{\beta} \omega(s) V(t,s)\, ds = V(t,\beta). \qquad (11)$$

Расчеты проводились при следующих параметрах: $p = \frac{b}{a} = 1.1$, $\beta_0 = 0.1$, $\Omega = 0.2$ и $\Omega = 1.1$. Для таких параметров решение интегрального уравнения (11) на отрезке $\sigma \in [0;1]$ в точках $\sigma_j = \frac{j}{12}$, $j = \overline{0;12}$ определяется таблицей 1.

Таблица 1

σ_j	$\Omega = 0.2$		$\Omega = 1.1$	
	$\operatorname{Re} w(\sigma_j)$	$\operatorname{Im} w(\sigma_j)$	$\operatorname{Re} w(\sigma_j)$	$\operatorname{Im} w(\sigma_j)$
0	0	0	0	0
1/12	-0.1266397	$-1.242137 \cdot 10^{-6}$	-0.095461	-0.003996
2/12	-0.1790884	$-1.756492 \cdot 10^{-6}$	-0.134999	-0.005651
3/12	-0.2193205	$-2.150917 \cdot 10^{-6}$	-0.165331	-0.006919
4/12	-0.2532212	$-2.483112 \cdot 10^{-6}$	-0.190896	-0.007988
5/12	-0.2830683	$-2.775399 \cdot 10^{-6}$	-0.213409	-0.008927
6/12	-0.3100306	$-3.039222 \cdot 10^{-6}$	-0.233754	-0.009776
7/12	-0.3348002	$-3.281357 \cdot 10^{-6}$	-0.25245	-0.010554
8/12	-0.3578287	$-3.506222 \cdot 10^{-6}$	-0.269841	-0.011276
9/12	-0.3794282	$-3.716867 \cdot 10^{-6}$	-0.286161	-0.011952
10/12	-0.3998271	$-3.915513 \cdot 10^{-6}$	-0.301584	-0.012589
11/12	-0.4191974	$-4.103833 \cdot 10^{-6}$	-0.316238	-0.013193
12/12	-0.4376717	$-4.283122 \cdot 10^{-6}$	-0.330224	-0.013768

Интегралы содержащие $w(\sigma)$ в (10) вычислялись по квадратурной формуле трапеций. Вектор-столбец значений комплексной амплитуды перемещений вычислялся на отрезке $\bar{z} \in [0;15]$ с шагом 0.5 в точках $\bar{z}_j = 0.5\, j$, $j = \overline{0;30}$ по формуле:

$$\left(U_{\varphi}\right)_j = \frac{M_0}{\mu a^2} \cdot \Phi\left(\bar{z}_j\right),$$

$$\Phi\left(\bar{z}_j\right) \approx \frac{\frac{\beta_0}{12}\left(\frac{G_{j,12}}{2} + \sum_{k=1}^{11}\sqrt{\frac{k}{12}}\cdot G_{j,\mathrm{k}}\right) - X_{j,12}}{\pi^2\left[\frac{\beta_0}{12}\left(\frac{w_{12}}{2} + \sum_{k=1}^{11}\sqrt{\frac{k}{12}}\cdot w_k\right) - 1\right]}, \tag{12}$$

где $G_{j,k} = X_{j,k}\cdot w_k$ – произведение комплексной матрицы $X_{j,k} = = X\left(a, \bar{z}_j, \sigma_k\right)$ на комплексный вектор-столбец – w_k.

Для вычисления элементов матрицы $X_{j,k}$ в интегралах, входящих в (8) проводились дополнительные замены переменных. В несобственном интеграле – $\sqrt{\eta^2 + k^2} = kx$, а в интеграле на отрезке $[0;k]$ – $\sqrt{k^2 - \xi^2} = kx$. В итоге для элементов $X_{j,k}$ получим:

$$X\left(a, \bar{z}_j, \sigma_k\right) = -\left(\mathrm{INT1}_{\mathrm{j,k}} + \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\mathrm{INT2}_{\mathrm{j,k}} + \mathrm{S}_{\mathrm{j,k}}\right), \tag{13}$$

здесь:

$$\mathrm{INT1}_{\mathrm{j,k}} = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^\infty f(x,\sigma_k)\left[\pi\frac{I_2(\varepsilon y)}{K_2(\varepsilon y)}\sin\left(\varepsilon\,\bar{z}_j x\right) + \cos\left(\varepsilon\,\bar{z}_j x\right)\right]dx\ ,$$

$$f(x,\sigma_k) = \frac{K_0(\beta_0\varepsilon\sigma_k y)}{\left(x^2-1\right)\left[\pi I_2^2(\varepsilon y) + K_2^2(\varepsilon y)\right]}, \qquad y = \sqrt{x^2-1}\ ;$$

$$\mathrm{INT2}_{\mathrm{j,k}} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \frac{H_0^{(2)}\left(\beta_0\varepsilon\,\sigma_k\sqrt{1-x^2}\right)\cos\left(\varepsilon\,\bar{z}_j\,x\right)}{\left(1-x^2\right)\left[J_2^2\left(\varepsilon\sqrt{1-x^2}\right) + Y_2^2\left(\varepsilon\sqrt{1-x^2}\right)\right]}\,dx\ ;$$

$$S_{j,k} = \pi\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\exp\left[-\bar{z}_j\cdot\sqrt{\zeta_0^2-\varepsilon^2}\right]}{\sqrt{\zeta_0^2-\varepsilon^2}}H_0^{(1)}\left(\zeta_0\sigma_k\beta_0\right)\right\},$$

где $\varepsilon = ka = \Omega/p$, $\sigma_k = \dfrac{k}{12}$, $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta_0^2 - \varepsilon^2} > 0$.

Расчеты проводились в среде математического пакета MathCAD PLUS 7.0 PRO. Несобственный интеграл в (13), содержащий сильно осциллирующие функции, вычислялся эффективным для этого случая методом Филона [10]. Верхний предел при этом полагался равным 351, что обеспечивает предельную точность счета на PC с величиной машинного нуля – 10^{-307}. Интеграл на промежутке $[0;1]$ вычислялся прямыми средствами MathCAD. Для вычисления функций Ханкеля комплексного аргумента в $S_{j,k}$ была написана программа (в комплексной арифметике), в которой использовалось формальное представление для $H_0^{(1)}(\zeta)$ согласно [1].

На рис.2 представлены графики функции $|\Phi(\bar{z})|$ определяющей, с точностью до множителя $M_0/\mu a^2$, зависимость модуля комплексной амплитуды – $|U_\varphi(\bar{z})|$ на цилиндрической поверхности от безразмерной координаты $\bar{z}$ (расчеты проводились в точках $\bar{z}_j = 0.5 \cdot j$; $j = \overline{0;30}$) для частот $\Omega = 0.2$ и $\Omega = 1.1$.

Зависимость модуля комплексной амплитуды вектора перемещения на цилиндрической поверхности от координаты $\bar{z}$

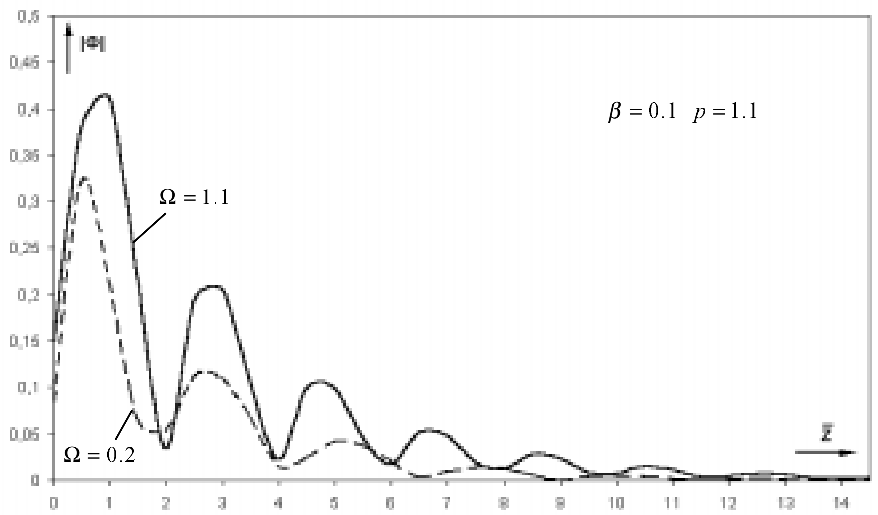

Рис.2

Как видно из графика, амплитуда $|\Phi(\bar{z})|$ гармонических во времени крутильных колебаний поверхности полости – осциллирующая и затухающая по координате $\bar{z}$ функция которую можно приблизить выражением вида:

$$|\Phi(\bar{z})| = A \cdot \exp(-s_1 \bar{z}) - B \cdot \exp(-s_2 \bar{z}) \cos(2\pi \bar{z}/T_z) \ . \qquad (14)$$

Методом интерполяции по графику (результатам численной реализации задачи) в (14) не трудно определить практически постоянный пространственный период T_z, показатели экспоненциального затухания s_1, s_2 и константы A и B. Так для $\Omega = 1.1$ период – $T_z \approx 2$, показатели экспонент $-s_1 \approx 0.373$, $s_2 \approx 0.225$, $A \approx 0.355$ и $B \approx 0.209$ (для первых трех пиков графика с точностью до 1%).

Таким образом, движение поверхности полости представляет стоячую волну $u(\bar{z}, t) = \dfrac{M_0}{\mu a^2} |\Phi(\bar{z})| \cos \Omega t$ частоты Ω с затухающей и осциллирующей по координате $\bar{z}$ амплитудой.

Затухание возмущения цилиндрической поверхности с ростом $\bar{z}$ – естественно и отвечает математической постановке задачи – требованию распространения возмущения от источника (условие излучения Зоммерфельда) и затухания на бесконечности.

Пространственную пульсацию амплитуды колебаний поверхности полости можно объяснить по аналогии с биениями, которые, как известно, возникают при сложении двух гармонических во времени колебаний, близких по частоте. В данном случае возникают «биения» по координате. Это очевидно связано с тем, что выражение (10) содержит слагаемые (13), гармонически зависящие от координаты $\bar{z}$, одно из которых дополнительно интегрируется (по σ), так что в результате складываются гармонические по координате возмущения мало отличающиеся по частоте.

Отметим в заключение, что полученная амплитудная характеристика зависит от частоты Ω (из рис. 2 видно, что величина затухания и период осцилляций различен для частот $\Omega = 0.2$ и $\Omega = 1.1$), что позволяет по измерениям $|\Phi(\bar{z})|$ определять частоту источника возмущения.

Список использованной литературы

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.:Наука, 1971.– 1107 с.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– Киев: Наук. Думка, 1978.– 264 с.
3. Зоммерфельд А.. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. – М., 1950. – 456 с.
4. Керимов М. К., Скороходов С. Л. Вычисление комплексных нулей модифицированной функции Бесселя второго рода и ее производных // Журнал вычислительной математики и математич. Физики АН СССР.– 1984. – Т.24, № 8.–С. 1150–1163.
5. Коренев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций – М.:Наука, 1971.– 288с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.:Наука, 1973.– 832 с
7. Малиц П. Я., Сницер А. Р., Шевляков Ю. А. О решении задачи Рейснера-Сагоци для полупространства с цилиндрической полостью. // Прикл. механика. – 1989. – Т.25, №7. – С. 24–30.
8. Малиц П. Я., Сницер А. Р. Крутильные колебания кругового штампа на упругом полупространстве и слое с цилиндрической полостью. // СимфГУ. – Симферополь, 1989 – 36 с. – (Деп. в Укр. НИИНТИ 26.05.89; № 1403-Ук89).
9. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 324 с.
10. Хемминг Р. В. Численные методы. – М.:Наука, 1972.– 400 с.

Поступила в редколлегию 12.03.99