УДК 532.5:517.9:532

Д. А. ЗАКОРА, асп., Симфероп. гос. ун-т

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Представлена новая задача о малых движениях гидродинамической системы: вязкая жидкость + система идеальных жидкостей. Получены условия существования сильного решения начально-краевой задачи, отвечающей малым движениям изучаемой гидросистемы, при условии, что система является статически устойчивой по линейному приближению.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим сосуд, частично заполненный $m+1$-й жидкостью, которые предполагаются несжимаемыми и несмешивающимися. Сосуд равномерно вращается вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Жидкости предполагаются тяжелыми, поэтому действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_0, нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена вязкой жидкостью плотности ρ_0 с динамическим коэффициентом вязкости μ (кинематический коэффициент вязкости $\nu = \mu/\rho_0$). Области Ω_i заполнены идеальными жидкостями плотности ρ_i ($i=\overline{1,m}$), $0<\rho_m<\cdots<\rho_0$.

Обозначим через $\vec{n}_i\,(i=\overline{0,m})$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ $(i=\overline{0,m})$. Через S_i обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью $\Omega_i(i=\overline{0,m})$. Обозначим через $\Gamma_0 := \partial\,\Omega_0 \setminus \overline{S}_0$ свободную поверхность вязкой жидкости, и через $\Gamma_{i-1}\cup\Gamma_i := \partial\,\Omega_i \setminus \overline{S}_i$ –свободные поверхности i-й ($i=\overline{1,m}$) идеальной жидкости. Введем систему координат $\mathrm{O}x_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось $\mathrm{O}x_3$ совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на равновесной поверхности Γ_0. В этом случае равномерная скорость вращения сосуда запишется в виде $\vec{\omega}_0=\omega_0\vec{e}_3$. Будем считать для определенности, что $\omega_0>0$.

Постановка линейной задачи о малых движениях рассматриваемой гидросистемы имеет следующий вид:

 ISSN 0203–3755. Динам. системы, 1999, Вып. 15

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} - 2\omega_0 (\vec{u}_0 \times \vec{e}_3) = -\rho_0^{-1} \nabla p_0 + \nu\, \Delta \vec{u}_0 + \vec{f}, \qquad div\, \vec{u}_0 = 0 \quad (\text{в } \Omega_0),$$

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} - 2\omega_0 (\vec{u}_i \times \vec{e}_3) = -\rho_i^{-1} \nabla p_i + \vec{f}, \quad div \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i;\, i = \overline{1,m}), \tag{1}$$

$$\vec{u}_0 = \vec{0} \quad (\text{на } S_0), \qquad \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\text{на } S_i;\, i = \overline{1,m}),$$

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = \vec{u}_{i+1} \cdot \vec{n}_i \quad (\text{на } \Gamma_i;\, i = \overline{0,m-1}), \quad \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} = \vec{u}_m \cdot \vec{n}_m \quad (\text{на } \Gamma_m),$$

$$p_m = \rho_m a_m \zeta_m \quad (\text{на } \Gamma_m), \quad p_i = \Delta\rho_i\, a_i\, \zeta_i + p_{i+1} \quad (\text{на } \Gamma_i;\, i = \overline{1,m-1}),$$

$$\mu\, ((u_0)_{k,3} + (u_0)_{3,k}) = 0 \quad (k = 1,2;\ \text{на } \Gamma_0),$$

$$-p_0 + 2\mu (u_0)_{3,3} = -(\Delta\rho_0)\, a_0 \zeta_0 - p_1 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \Delta\rho_i := \rho_i - \rho_{i+1} > 0, \tag{2}$$

$$\vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^{\,0}(x), \quad \zeta_i(0, \hat{\xi}_i) = \zeta_i^0(\hat{\xi}_i) \quad (i = \overline{0,m}).$$

Здесь $\vec{u}_i\ (i = \overline{0,m})$ – поля скоростей жидкостей в соответствующих областях, $p_i\ (i = \overline{0,m})$ – динамические давления в жидкостях, $\zeta_i\ (i = \overline{0,m})$ – малые нормальные отклонения свободных границ от состояния равновесия, $a_i\ (i = \overline{0,m})$ – известные гладкие функции заданные на $\Gamma_i\ (i = \overline{0,m})$, $\vec{f}$ – малое поле внешних массовых сил. Далее считаем, что движения гидросистемы статически устойчивы по линейному приближению; это означает, что функции $a_i\ (i = \overline{0,m})$ строго положительны на $\Gamma_i\ (i = \overline{0,m})$.

2. Операторная формулировка задачи и сильные решения соответствующей задачи Коши. Применим к задаче (1) метод ортогонального проектирования (см. [1]). После отделения тривиальных решений основную задачу можно записать в виде дифференциального уравнения в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\widetilde{H} := \vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \oplus H_0 \oplus H$:

$$\widetilde{J}\, \frac{d\,y}{d\,t} + \widetilde{A} y + 2\omega_0 i \widetilde{S} y = f, \qquad y(0) = y^0, \tag{3}$$

где

$$\widetilde{J}:=\begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & C_{1,2} \\ 0 & B_0 & 0 \\ C_{2,1} & 0 & B_C \end{pmatrix},\ \widetilde{A}:=\begin{pmatrix} \mu A & G_0B_0 & 0 \\ -B_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix},\ \widetilde{S}:=\begin{pmatrix} S_{1,1} & 0 & S_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & 0 & S_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$H:=\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}}\vec{G}_{i,2}(\Omega_i)\right)\oplus\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}}\vec{J}_0(\Omega_i)\right)\oplus\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}}H_i\right),\quad H_i:=L_{2,\Gamma_i}\quad (i=\overline{0,m}),$$

$$\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0):=\{\vec{u}_0\in\vec{L}_2(\Omega_0)\,|\,div\vec{u}_0=0\quad (в\,\Omega_0),\quad \vec{u}_0\cdot\vec{n}_0=0\quad (на\ S_0)\},$$

$$\vec{G}_{i,2}(\Omega_i):=\{\vec{w}_i=\nabla p_i\,|\,\Delta p_i=0\quad (в\,\Omega_i),\quad \frac{\partial p_i}{\partial\vec{n}_i}=0\quad (на\ S_i\cup\Gamma_{i-1}),\ \int_{\Gamma_i}p_i\,d\Gamma_i=0\},$$

$$\vec{J}_0(\Omega_i):=\{\vec{v}_i\in\vec{L}_2(\Omega_i)\,|\,div\,\vec{v}_i=0\quad (в\,\Omega_i),\quad \vec{v}_i\cdot\vec{n}_i=0\quad (на\,\partial\Omega_i)\},$$

$$y:=(\vec{u}_0,\zeta_0,v)^t:=(\vec{u}_0;\zeta_0;\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m,\zeta_1,\dots,\zeta_m)^t,\quad f:=(\vec{f}_1,0,f_2)^t.$$

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{P}:=diag\,(0,I_{\Gamma_0},I),\qquad B_0\gamma_0A^{-1/2}=:Q,\qquad A^{-1/2}G_0B_0=:Q^+.$$

Сделаем в уравнении (3) замену $y(t)=e^tz(t)$. В результате получим уравнение относительно $z(t)$:

$$\widetilde{J}\frac{dz}{dt}+\left(\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}\right)z+\left(\widetilde{J}-\varepsilon\widetilde{P}\right)z+2\omega_0\,i\widetilde{S}z=e^{-t}f,\tag{4}$$

где число $\varepsilon>0$ выбрано таким образом, что $\widetilde{J}-\varepsilon\widetilde{P}>>0$. Это возможно, так как $\widetilde{J}>>0$ в $\widetilde{H}$.

Лемма 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $0<<\widetilde{J}=\widetilde{J}^*\in L(\widetilde{H}),\quad \widetilde{S}=\widetilde{S}^*\in L(\widetilde{H})$;
2. *$F=-F^*$ неограничен в H;*
3. $0<<A=A^*,\quad A^{-1}\in S_\infty$;
4. $Q^+\subset Q^*,\quad Q^+=Q^*\big|_{D(G_0)},\quad \overline{Q}^+=Q^*$;
5. *оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ аккретивен.*

Доказательство леммы довольно обширно и потому здесь не приводится.

Оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ не является замкнутым из-за того, что оператор γ_0 неограничен в $\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0)$ и $D(\gamma_0)\supset D(A)$. Таким образом, оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ не является максимальным аккретивным, но допускает замыкание до максимального аккретивного оператора.

Лемма 2. *Замыкание* A_0 *оператора* $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ *есть максимальный аккретивный оператор. При этом*

$$D(A_0)=\left\{(\vec{u}_0,\zeta_0,v)^t\,\middle|\,\mu\,\vec{u}_0+A^{-1/2}Q^*\zeta_0\in D(A),\quad v\in D(F)\right\},$$

$$A_0=\begin{pmatrix}A^{1/2}&0&0\\0&I_{\Gamma_0}&0\\0&0&I\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mu I_0&Q^*&0\\-Q&\varepsilon I_{\Gamma_0}&0\\0&0&\varepsilon I+F\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A^{1/2}&0&0\\0&I_{\Gamma_0}&0\\0&0&I\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ можно представить в форме, аналогичной A_0 с заменой Q^* на Q^+. Замыкание оператора $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ состоит в замене в среднем блоке Q^+ на Q^*. Действительно, оператор A_0 представлен в виде произведения трех замкнутых операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный, а значит (это можно доказать) он замкнут.

Найдем область определения $D(A_0)$ оператора A_0. Прежде всего, из представления для оператора A_0 следует, что $\vec{u}_0\in D(A^{1/2})$, $v\in D(F)$. Далее, должно иметь смысл следующее выражение:

$$diag\,(A^{1/2},I_{\Gamma_0},I)\cdot(\mu\,A^{1/2}\vec{u}_0+Q^*\zeta_0,\quad -QA^{1/2}\vec{u}_0+\varepsilon\,\zeta_0,\quad (\varepsilon\,I+F)v)^t,$$

то есть $\mu A^{1/2}\vec{u}_0+Q^*\zeta_0\in D(A^{1/2})$ или $\mu\,\vec{u}_0+A^{-1/2}Q^*\zeta_0\in D(A)$. Таким образом, заключаем

$$D(A_0)=\left\{(\vec{u}_0,\zeta_0,v)^t\,\middle|\,\mu\vec{u}_0+A^{-1/2}Q^*\zeta_0\in D(A),\quad v\in D(F)\right\}.$$

Заметим, что условие $\vec{u}_0\in D(A^{1/2})$ следует из требования $\mu\,\vec{u}_0+A^{-1/2}Q^*\zeta_0\in D(A)$. Действительно, так как $D(A)\subset D(A^{1/2})$ и $A^{-1/2}Q^*\zeta_0\in D(A^{1/2})$ для любого $\zeta_0\in H_0$, то $\vec{u}_0$ также принадлежит $D(A^{1/2})$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь уравнение (4) с заменой $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ на замкнутый оператор A_0. Оператор $A_0+\widetilde{J}-\varepsilon\widetilde{P}+2\omega_0\widetilde{S}$ уже максимальный аккретивный. Введем в $\widetilde{H}$ эквивалентную норму с помощью квадратичной формы оператора $\widetilde{J}$ и преобразуем уравнение (4) к виду

$$\frac{dz}{dt} = -\widetilde{J}^{-1}\left(A_0 + \widetilde{J} - \varepsilon\widetilde{P} + 2\omega_0 i\widetilde{S}\right)z + \widetilde{J}^{-1}e^{-t}f, \quad z(0) = y^o. \qquad (5)$$

Используя выводы общей теории линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах (см. [3], [1]) приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Задача Коши (5) имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *выражаемое формулой*

$$z(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-\tau)\widetilde{J}^{-1}e^{-\tau}f(\tau)\,d\tau,$$
$$U(t) := \exp\left(-t\widetilde{J}^{-1}\left(A_0 + \widetilde{J} - \varepsilon\widetilde{P} + 2\omega_0 i\widetilde{S}\right)\right),$$

если выполнены следующие условия:

1. $y^0 \in D(A_0)$, 2. $f(t) \in C^1\left([0,T];\widetilde{H}\right)$.

Записывая уравнение (5) в виде системы, можно показать, что для начальных данных из области определения незамкнутого оператора соответствующее решение также находится в области определения незамкнутого оператора. Осуществляя в этой системе обратную замену $z(t) = e^{-t}y(t)$, мы прийдем к следующему утверждению.

Теорема 2. *Задача Коши (3) имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *если выполнены следующие условия:*

1. $y^0 \in D(\widetilde{A})$, 2. $f(t) \in C^1\left([0,T];\widetilde{H}\right)$.

Переформулировка последнего результата в терминах исходной задачи приводит нас к следующему выводу.

Теорема 3. *Начально-краевая задача (1)-(2) имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *если выполнены условия:*

1. $\vec{u}_0^0 \in D(A)$, $\zeta_0^0 \in H_{\Gamma_i}^{1/2}$, $\vec{u}_i^0 \in \vec{H}^{1/2}(\Omega_i) \cap \vec{J}_{\overset{\frown}{0,S_i}}(\Omega_i)$, $\zeta_i^0 \in H_{\Gamma_i}^{1/2}$ $(i = \overline{1,m})$,

$$\vec{J}_{\overset{\frown}{0,S_i}}(\Omega_i) := \Big\{ \vec{u}_i \in \vec{L}_2(\Omega_i) \Big| \; div\,\vec{u}_i = 0 \quad (в\,\Omega_i), \quad \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (на\ S_i),$$
$$\int_{\Gamma_{i-1}} \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i d\,\Gamma_{i-1} = 0, \quad \int_{\Gamma_i} \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i d\,\Gamma_i = 0 \;\Big\},$$

$$причем \quad \vec{u}_i^0(x) \cdot \vec{n}_i = \vec{u}_{i+1}^0(x) \cdot \vec{n}_i \quad (на\ \Gamma_i;\ i = \overline{0,m-1}),$$

2. $\vec{f}(t) \in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega)\right)$ $\left(\Omega = \overset{m}{\underset{i=0}{\oplus}}\Omega_i\right)$.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н.Д.Копачевскому за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Список использованной литературы

1. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.-416 с.
2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Selfajoint Problems for ideal fluid; Vol. 2: Nonselfajoint Problems for Viscous fluid. (в печати; изд-во Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, объем 60 печ. листов).
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве (Серия: ‘‘Современные проблемы математики‘‘)-М., 1967.-464 с.
4. Закора Д. А. Малые движения одной частично диссипативной гидросистемы // (Симферополь, Симф. госуниверситет)-Деп. в Укр ИНТЕИ 25.03.97, N 267-Уі97
5. Kopachevsky N. D., Zakora D. A. Problems on small movements of partially dissipative hydrosistems // Тезисы докладов международной конференции по теории операторов и приложениям, посвященной М. Г. Крейну, август 18-22 1997 г., Одесса.

Поступила в редколлегию 05.11.98