вблизи инерционного периода T_I в диапазоне 17.5 – 18.5 часов свободные колебания могут не существовать. Заметно влияние b - эффекта на распределение амплитуды волны: амплитуда локализуется и ее наибольшие значения достигаются вдоль северо-западного побережья Крымского полуострова. Приближения b и f - плоскости существенно отличаются для волн с наименьшими порядковыми номерами k. С возрастанием номера k это различие исчезает.

Список использованной литературы

1. Иванов Ю.Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море. //Доп. НАН України. – 1999.– N7.– С. 117–120.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. – М.:Мир,1981. – 430 с.
3. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.Н. Введение в гидродинамику и теорию волн. – Санкт-Питербург: Гидрометеоиздат,1992. – 264 с.
4. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эвалюционные и спектральные задачи. – М.:Наука, 1989. – 416 с.

Поступила в редколлегию 5.06.2000

УДК 539.517.3

В.С. АБРАМОВ, канд. физ.-мат.наук, ДонФТИ НАН Украины
О.П. АБРАМОВА, канд. физ.-мат.наук, Донецкий гос. ун-т
Н.О. ЕФИМЕНКО, асп. Донецкий гос.ун-т

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЫ ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЫ

В явном виде на основе дробного исчисления получены модельные уравнения динамики для анизотропной пластической подсистемы фрактальной среды. Выполнен анализ и дано графическое представление результатов по медленной динамике ряда параметров.

При описании фрактальных квазиодномерных сред успешно используется модель фрактальной струны [1]. В рамках этой модели основное уравнение динамики содержит тензоры второго ранга для эффективных плотности и силового параметра фрактальной струны. При этом диагональные компоненты указанных тензоров описывают пластическую (вязкую), упругую и ползучую подсистемы фрактальной струны, а недиагональные компоненты ответственны за взаимосвязи между указанными подсистемами. В работе [2] было выполнено обобщение на трехмерный случай для пластической подсистемы фрактальной среды и записано уравнение динамики в общем тензорном виде. Целью данной работы является получение уравнений динамики в явном виде для ряда конкретных моделей анизотропной пластической подсистемы фрактальной среды.

Общее тензорное уравнение динамики для пластической подсистемы фрактальной среды [2]

$$D^{n}\,(r\,D^{n} u_{s}) = D_{k}\,X_{sk}\,;\quad X_{sk} = k_{sknm}\,D_{m}\,u_{n}\,;\quad s,k,n,m = 1,2,3 \tag{1}$$

получено на основе математического формализма дробного исчисления [3]. Здесь эффективные плотность r и тензор четвертого ранга k_{sknm} силового параметра описывают только пластическую подсистему фрактальной среды. Искомые функции $u_s = u_s(x_1, x_2, x_3, t)$, зависящие от декартовых координат x_1, x_2, x_3 и времени t, нелокальным образом связаны с компонентами смещений u'_s фрактальной среды [2]. Структура оператора D^n определена выражением

$$D^{n}\,u_{s} = \partial_{t}\int_{t'}^{t} u_{s}\,(x_1, x_2, x_3, t\,)\,\big|\,t - t\,\big|^{-n}\,dt\,/\,\Gamma(1-n\,), \tag{2}$$

где n – показатель порядка оператора дробной частной производной Римана–Лиувилля D^n по переменной времени t; ∂_t – оператор обычной частной производной по переменной времени t; Γ – гамма-функция; интегрирование ведется от начального состояния t' до текущего состояния t при фиксированных пространственных координатах. Компоненты тензора второго ранга $D_m u_n$ и оператора D_m определены соотношениями

$$D_m\,u_n = \begin{pmatrix} D_1^a\,u_1 & D_1^a\,u_2 & D_1^a\,u_3 \\ D_2^b\,u_1 & D_2^b\,u_2 & D_2^b\,u_3 \\ D_3^g\,u_1 & D_3^g\,u_2 & D_3^g\,u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^a \\ D_2^b \\ D_3^g \end{pmatrix} (u_1\,u_2\,u_3). \tag{3}$$

Здесь a, b, g – показатели порядка операторов дробных частных производных Римана - Лиувилля D_1^a, D_2^b, D_3^g, по пространственным координатам x_1, x_2, x_3, соответственно. Структура этих операторов записывается по аналогии с оператором D_1^a

$$D_1^a\,u_n = \partial_1\int_{a_1}^{x_1} u_n\,(x_1, x_2, x_3, t)\,\big|\,x_1 - x_{\,1}\,\big|^{-a}\,dx_1\,/\,\Gamma(1-a\,), \tag{4}$$

где ∂_1 – оператор обычной частной производной по координате x_1; интегрирование ведется от начального состояния a_1 до текущего состояния x_1 при фиксированных координатах x_2, x_3 и времени t. Мы сохраняем физическую интерпретацию [2] показателей операторов дробных производных как фрактальных размерностей $n, a, b, g \in [0;1]$ вдоль временной, пространственных осей, соответственно, для фрактальной среды.

Перепишем тензорное уравнение (1) в виде системы трех связанных уравнений

$$
\begin{aligned}
D^n\,(r\,D^n\,u_1) &= D_1^a\,X_{11} + D_2^b\,X_{12} + D_3^g\,X_{13} = Y_1\,;\\
D^n\,(r\,D^n\,u_2) &= D_1^a\,X_{21} + D_2^b\,X_{22} + D_3^g\,X_{23} = Y_2\,;\\
D^n\,(r\,D^n\,u_3) &= D_1^a\,X_{31} + D_2^b\,X_{32} + D_3^g\,X_{33} = Y_3\,.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Введем единичные базисные векторы $\vec{e}_i$ и векторы $\vec{u} = u_i\,\vec{e}_i$, $\vec{Y} = Y_i\,\vec{e}_i$ (по паре одинаковых индексов подразумевается суммирование, $i = 1,2,3$). Тогда система (5) принимает компактную форму записи

$$
D^n\,(r\,D^n\,\vec{u}) = \vec{Y}\,. \qquad (6)
$$

Рассмотрим модель анизотропной пластической подсистемы фрактальной среды с пятью независимыми параметрами m_1, m_2 m_3, m_4, l, которые связаны с ненулевыми компонентами тензора k_{sknm} следующими соотношениями

$$
\begin{aligned}
&k_{1122} = k_{2211} = k_{2233} = k_{3322} = k_{1133} = k_{3311} = l\;;\quad k_{1111} = m_1\,;\\
&k_{1212} = k_{1221} = k_{2121} = k_{2112} = k_{1313} = k_{1331} = k_{3131} = k_{3113} = k_{2323} =\\
&= k_{2332} = k_{3232} = k_{3223} = m_4\;;\quad k_{2222} = m_2\;;\quad k_{3333} = m_3\,.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Такой выбор параметров выполнен по аналогии с описанием обычных анизотропных сред [4]. В общем случае указанные параметры могут быть функциями от координат и времени. С учетом выражений (1), (3), (7) находим компоненты симметричного тензора $X_{sk} = X_{ks}$

$$
\begin{aligned}
&X_{11} = m_1\,D_1^a\,u_1 + l\,(D_2^b\,u_2 + D_3^g\,u_3)\,;\; X_{12} = X_{21} = m_4\,(D_2^b\,u_1 + D_1^a\,u_2)\,;\\
&X_{22} = m_2\,D_2^b\,u_2 + l\,(D_1^a\,u_1 + D_3^g\,u_3)\,; X_{13} = X_{31} = m_4 (D_3^g\,u_1 + D_1^a\,u_3)\,; \quad (8)\\
&X_{33} = m_3\,D_3^g\,u_3 + l\,(D_1^a\,u_1 + D_2^b\,u_2)\,;\; X_{23} = X_{32} = m_4\,(D_3^g\,u_2 + D_2^b\,u_3)\,.
\end{aligned}
$$

После подстановки выражений (8) в (5) получим систему трех связанных дифференциальных уравнений с дробными производными относительно неизвестных функций u_1, u_2, u_3. Анализ и получение решений такой системы в общем случае затруднителен. С целью преодоления указанных трудностей мы применим полевой подход, предложенный в работе [2]. Согласно этому подходу вводим векторно-дифференциальный оператор ∇_D (по аналогии с оператором Набла для обычной среды), понятия фрактального градиента $Grad\ u_i$ для скалярного поля u_i и фрактальной дивергенции $Div\ \vec{u}$ для векторного поля $\vec{u}$ следующими соотношениями

$$\nabla_D = \vec{e}_1 D_1^a + \vec{e}_2 D_2^b + \vec{e}_3 D_3^g\ ;\ \ Grad\ u_i = \nabla_D u_i\ ;$$
$$Div\ \vec{u} = \nabla_D \cdot \vec{u} = D_1^a u_1 + D_2^b u_2 + D_3^g u_3\ . \tag{9}$$

Фрактальный ротор $Rot\ \vec{u}$ векторного поля $\vec{u}$ определен выражением

$$Rot\ \vec{u} = \nabla_D \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ D_1^a & D_2^b & D_3^g \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Обозначения типа $(\cdot)$ и $(\times)$ соответствуют скалярному и векторному произведениям. С учетом выражений (5), (8) – (10) находим искомое выражение для векторного поля $\vec{Y}$ в правой части уравнения (6)

$$\vec{Y} = Grad(l\ Div\vec{u}) + Rot\ (m_4\ Rot\vec{u}) + 2(\nabla_D \cdot m_4 \nabla_D)\vec{u} + \vec{B}\ ;$$
$$\vec{B} = \vec{e}_1 D_1^a\ (m_a\ D_1^a u_1) + \vec{e}_2 D_2^b\ (m_b\ D_2^b u_2) + \vec{e}_3 D_3^g\ (m_g\ D_3^g u_3)\ ; \tag{11}$$
$$m_a = m_1 - l - 2m_4\ ;\ \ m_b = m_2 - l - 2m_4\ ;\ \ m_g = m_3 - l - 2m_4\ .$$

Таким образом, уравнение (6) с правой частью в форме (11) и представляют собой искомые уравнения динамики для рассматриваемой модели анизотропной пластической подсистемы фрактальной среды. Такая форма записи позволяет выполнить сравнительный анализ, выявить различия и аналогии с полевыми уравнениями динамики обычных сред.

Теперь рассмотрим ряд частных случаев, следующих из выражений (11). Если $m_1 = m_2 = m_3 = l + 2m_4$, то $m_a = m_b = m_g = 0$ и из (11) следует уравнение динамики

$$D^n\,(r\,D^n\vec{u}) = Grad\,(l\;Div\,\vec{u}) + Rot\,(m_4\,Rot\,\vec{u}) + 2\,(\nabla_D\cdot m_4\,\nabla_D)\,\vec{u} \tag{12}$$

для изотропной фрактальной среды, которая описывается только двумя независимыми переменными силовыми параметрами l, m_4. Дальнейшее упрощение уравнений можно выполнить, если положить параметры r, l, m_4 постоянными и учесть соотношения

$$\begin{gathered} Rot\,Rot\,\vec{u} = Grad\,Div\,\vec{u} - \nabla_D^2\,\vec{u}\,; \\ \nabla_D^2\,\vec{u} = (\nabla_D\cdot\nabla_D)\,\vec{u} = (D_1^a D_1^a + D_2^b D_2^b + D_3^g D_3^g)\,\vec{u}\,. \end{gathered} \tag{13}$$

В результате получаем уравнения динамики для изотропной фрактальной среды с постоянными параметрами r, l, m_4 в виде

$$r\,D^n D^n\vec{u} = m_4\nabla_D^2\,\vec{u} + (l + m_4)\,Grad\,Div\,\vec{u}\,. \tag{14}$$

Отметим, что при $n = a = b = g = 1$ уравнение (14) переходит в уравнение динамики обычной изотропной среды, известное в теории упругости [4]. При этом вектор $\vec{u}$ приобретает смысл вектора смещения; параметры l и m_4 совпадают с коэффициентами Ламэ; r имеет смысл плотности среды; параметры v_m и v_l означают поперечную и продольную скорости звука, определяемые формулами $v_m^2 = m_4 / r$, $v_l^2 = (l + 2m_4)/r$. Данные факты свидетельствуют о возможном строгом предельном переходе от уравнений динамики фрактальной среды к уравнениям обычной среды и о достоверности получаемых результатов. Для другого частного случая при $l = m_4 = 0$ из (11), (6) следуют три независимые дифференциальные уравнения в дробных производных относительно неизвестных функций u_1, u_2, u_3, соответственно,

$$\begin{gathered} D^n\,(r\,D^n u_1) = D_1^a\,(m_1\,D_1^a u_1)\,; \quad D^n\,(r\,D^n u_2) = D_2^b\,(m_2\,D_2^b u_2)\,; \\ D^n\,(r\,D^n u_3) = D_3^g\,(m_3\,D_3^g u_3) \end{gathered} \tag{15}$$

для анизотропной фрактальной среды, которая описывается теперь тремя независимыми переменными силовыми параметрами m_1, m_2, m_3. Отдельное уравнение из (15) по этой причине можно рассматривать как уравнение динамики для фрактальной струны вдоль соответствующей координатной оси и использовать известные методы решения задачи Коши для первого уравнения из (15). Приведем для параметров r и m_1 их выражения в явном виде [1]:

$$r = r_0(t)c_1^2\,;\; m_1 = m_0(x_1)\,g_1^2\,;\; c_1\,\Gamma(n) = \left|t-t'\right|^{n-1};\, g_1\,\Gamma(a) = \left|x_1-a_1\right|^{a-1}. \quad (16)$$

Если в процессе временной и пространственной эволюций параметры $r_0(t),\, m_0(x_1)$ следуют за изменениями $c_1(t),\, g_1(x_1)$ без запаздывания, то параметры r, m_1 можно считать постоянными. В этом случае первое уравнение (15) упрощается и принимает вид

$$D^n D^n u_1 = v_0^2\, D_1^a D_1^a u_1\,;\;\; v_0^2 = m_1 / r\,. \quad (17)$$

Применив метод разделения переменных $u_1(x_1, x_2, x_3, t) =$ $= u_{11}(t)\; u_{21}(x_1)\; f_1(x_2, x_3)$, находим решение уравнения (17) относительно неизвестных функций u_{11}, u_{21} в виде

$$\begin{gathered} u_{11} = b_2 N_1 + b_1 N_2\;;\;\; u_{21} = s_2 R_1 + s_1 R_2\;; \\ N_1 = \left|t-t'\right|^{2n-1} \mathrm{E}_{2n,2n}(z_1)\,;\;\; N_2 = \left|t-t'\right|^{n-1} \mathrm{E}_{2n,n}(z_1)\,; \\ R_1 = \left|x_1-a_1\right|^{2a-1} \mathrm{E}_{2a,2a}(z_2)\,;\;\; R_2 = \left|x_1-a_1\right|^{a-1} \mathrm{E}_{2a,a}(z_2)\,. \end{gathered} \quad (18)$$

Здесь $\mathrm{E}_{a,b}(z)$– функция Миттаг-Леффлера [3], параметры $b_1,\, b_2, s_1,\, s_2$ и функция $f_1(x_2, x_3)$ определяются начальными условиями задачи Коши. Аргументы z_1, z_2 определены соотношениями

$$z_1 = l_1\left|t-t'\right|^{2n}\;;\;\; z_2 = l_2\left|x_1-a_1\right|^{2a}\;;\;\; l_1 = l_2 v_0^2\,, \quad (19)$$

где параметры $l_1,\; l_2$ находятся при решении спектральной задачи и в дальнейшем считаем их заданными. Искомые компоненты смещения $u'_1 = u'_{11} + u'_{21}$ точек рассматриваемой фрактальной струны, пластическая дисторсия b_1, скорость пластического течения v_1 связаны с найденными решениями (18), (19) для функции u_1 следующими выражениями [1]

$$\begin{gathered} u'_{11} = g_3\, D^n u_1\;;\;\; u'_{21} = g_2\, D_1^a u_1\;;\;\; b_1 = g_1\, D_1^a u_1\;; \\ v_1 = c_1\, D^n u_1\;;\;\; g_3\,\Gamma(1+n) = \left|t-t'\right|^{n}\;;\;\; g_2\,\Gamma(1+a) = \left|x_1-a_1\right|^{a}\,. \end{gathered} \quad (20)$$

По аналогии можно получить решение задачи Коши для второго и третьего уравнений (15).

Выполнен численный анализ решений (18) и приведено графическое представление результатов для смещения u'_{11} (рис. 1) и дисторсии b_1 (рис. 2), которые выявляют аномальное динамическое поведение (медленную динамику) фрактальной струны в ходе временной и пространственной эволюций. При численном анализе был сделан переход к безразмерным переменным, для которых ниже сохраняются прежние обозначения.

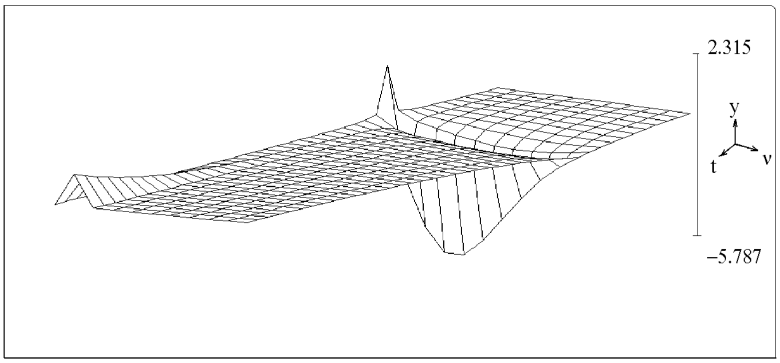

Рис.1. Зависимость нормированного смещения $y = u'_{11} / u_{21} f_1 = g_3(b_1 N_1 + b_2 N_2)$ точек фрактальной струны от безразмерного времени t и фрактального параметра n для случая, когда $b_1 = l_1 = t' = 1$; $b_2 = -1$; $t \in [0{,}001;\ 4]$ и $n \in [0{,}001;\ 1]$ с шагом 0,1.

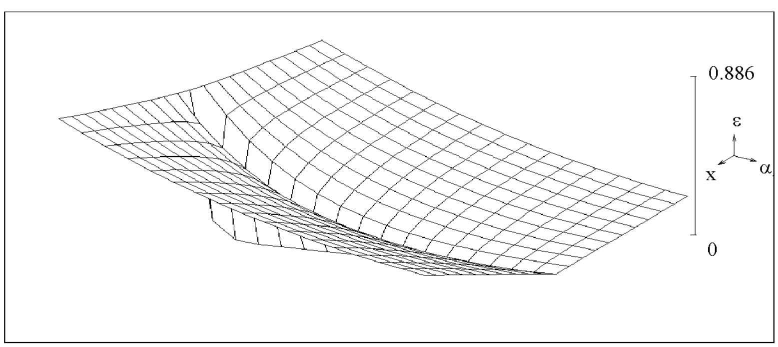

Рис. 2. Зависимость нормированной дисторсии $e = b_1 / u_{11} f_1 = g_1(s_1 R_1 + s_2 R_2)$ точек фрактальной струны от безразмерной координаты $x = x_1$ и фрактального параметра a для случая, когда $s_1 = l_2 = a_1 = 1$, $s_2 = 0$; $x \in [0{,}8;\ 1{,}2]$ и $a \in [2/3; 1]$ с шагом 0,02.

Список использованной литературы

1. Abramov V.S. A model of the fractal string // Физ. и техн. высок. Давлений. – 1997. –Т.7, N 1. С. 28–35.
2. Абрамов В.С., Абрамова О.П. Полевой подход на основе дробного исчисления к описанию динамики фрактальных сред // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды III Междунар. конф., Ростов–на–Дону, 7–9 октября 1997 г. – Ростов-на-Дону, – 1997. – Т.1. С. 6–10.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987.– 688 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости.– М.: Наука, 1987.– 248 с.
5. Абрамов В.С., Абрамова О.П. Задача типа Коши для фрактальной струны // Теорет. и прикл. механика. Харьков, –1997.– Вып.27. С.137–145.

Поступила в редколлегию 17.04.2000