КОЛЕБАНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 517.9

О. В. АНАШКИН, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенной системы функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с малым запаздыванием. Приведены достаточные условия, гарантирующие сходимость решений системы к соответствующим решениям предельной системы в случае, когда основное условие классической теоремы Тихонова о предельном переходе в сингулярно возмущенной системе – условие равномерной асимптотической устойчивости точки покоя присоединенной системы, заменяется более слабым условием неасимптотической устойчивости по Ляпунову. Показано, что в результате отказа от условия Тихонова происходит расширение пограничного слоя, в котором нарушается равномерность предельного перехода.

1. Многие технические, биологические, химические, социальные системы характеризуются очень большой разницей скоростей изменения переменных величин, входящих в соответствующие математические модели. Кроме того, нередко скорость изменения переменных зависит не только от текущих значений, но и от значений в прошлые моменты времени. Такие математические модели описываются сингулярно возмущенными функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа.

Для данных $\Delta > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $C_{\Delta,n} = C([-\Delta,0],\mathbf{R}^n)$ банахово пространство непрерывных на отрезке $[-\Delta,0]$ вектор-функций с supremum-нормой $\|x(\cdot)\|$. Для непрерывной функции $x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ через x_t обозначим элемент из $C_{\Delta,n}$, определенный как $x_t(s) = x(t+s)$, $-\Delta \le s \le 0$.

Рассмотрим начальную задачу для сингулярно возмущенной системы функционально-дифференциальных уравнений с малым запаздыванием

$$\begin{aligned} e\dot{x}(t) &= f(x(t), y(t), e) + r(x_t, y_t, e), \\ \dot{y}(t) &= g(x_t, y_t, t, e), \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x_0(\cdot,e) = x(\cdot) \in C_{eh,n}, \qquad y_0(\cdot,e) = y(\cdot) \in C_{eh,m}, \qquad (2)$$

где e – малый параметр, $x = (x_1, \mathbf{K}, x_n)$, $y = (y_1, \mathbf{K}, y_m)$, h – положительная постоянная, функции $f:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times [0,e^*] \to \mathbf{R}^n$,

$r : C_{eh,n} \times C_{eh,m} \times [0,e^*] \to \mathbf{R}^n$ и $g : C_{eh,n} \times C_{eh,m} \times \mathbf{R} \times [0,e^*] \to \mathbf{R}^m$ удовлетворяют условию Липшица по x, y, x_t, y_t в соответствующих областях, непрерывны по малому параметру e в нуле и, кроме того, $r(x_t, y_t, 0) \equiv 0$.

Полагая в (1) $e = 0$, получим *вырожденную* систему

$$0 = f(x, y, 0), \quad \dot{y} = g_0(x, y, t), \tag{3}$$

где $g_0(x, y, t) = g(x_t, y_t, t, e)\big|_{e=0}$. Отметим, что вырожденная система уже является системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что уравнение $f(x, y, 0) = 0$ имеет изолированный корень $x = j\,(y)$, причем функция $j : D \to \mathbf{R}^n$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой замкнутой ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^m$. Подставляя $j\,(y)$ вместо x во второе уравнение в (3), получим задачу Коши

$$\dot{\bar{y}} = g_0(j\,(\bar{y}), \bar{y}, t), \quad \bar{y}(0) = y\,(0). \tag{4}$$

Пусть решение $\bar{y}(t)$ этой задачи определено на отрезке $0 \le t \le T$. Пару функций $\bar{x}(t) = j\,(\bar{y}(t))$, $\bar{y}(t)$ назовем решением вырожденной системы (3).

При $h = 0$ система (1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений и классическая теорема Тихонова [1, 2] о предельном переходе дает условия, при которых решение вырожденной системы $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ является асимптотическим приближением для решения $x(t,e), y(t,e)$ задачи (1)-(2) при $e \to 0$. Теорема Тихонова справедлива и для функционально-дифференциальных уравнений вида (1) с малым запаздыванием eh. Например, в [3] приводится соответствующее утверждение для системы уравнений вида (1) с постоянным сосредоточенным запаздыванием.

Основным условием теоремы Тихонова является предположение о равномерной по $y \in D$ асимптотической устойчивости точки покоя $x = j\,(y)$ *присоединенной* системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y, 0), \tag{6}$$

где y играет роль параметра. В настоящей статье формулируется теорема о предельном переходе для случая, когда это условие нарушено, распространяющая на функционально-дифференциальные уравнения вида (1) результат из статьи автора [4]. А именно, предполагается, что точка покоя $x = j\,(y)$ присоединенной системы (6) лишь устойчива по Ляпунову равномерно по $y \in D$. В этом случае притяжение траекторий системы (1) к корню $x = j\,(y)$ может обеспечиваться только за счет уничтожающихся при $e = 0$ слагаемых в правой части уравнения для $\dot{x}$ в (1). Как следствие происходит асимптотическое расширение пограничного слоя, в котором нарушается равномерность предельного перехода.

2. Введем новые переменные p, q, t так, что

$$x = p + j\,(q),\ \ y = q\,,\ \ t = et\ ,$$

и следующие обозначения:

$$F(p,q) = f(p + j\,(q), q, 0), \qquad G(p_t\,, q_t\,, et\,, e) = g([p + j\,(q)]_t\,, q_t\,, et\,, e),$$

$$q\,(e)R(p_t\,, q_t\,, et\,, e) = r([p + j\,(q)]_t\,, q_t\,, e) - e\,\frac{\partial j}{\partial y}G(p_t\,, q_t\,, et\,, e),$$

где $q\,(e)$ выбирается таким образом, что функция $R(p_t\,, q_t\,, et\,, 0)$ не является тождественно нулевой. С учетом этих обозначений система (1) в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= F(p(t), q(t)) + q\,(e)R(p_t\,, q_t\,, et\,, e), \\ \frac{dq(t)}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad eG(p_t\,, q_t\,, et\,, e). \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что $p_t\,(\cdot) \in C_{h,n}$, $q_t\,(\cdot) \in C_{h,m}$ и (7), в отличие от (1), является системой уравнений с конечным запаздыванием $h > 0$, которое не зависит от e. Присоединенная система (6) записывается теперь так

$$\frac{dp(t)}{dt} = F(p(t), q)\,. \tag{8}$$

Предположим, что (8) имеет равномерно устойчивое относительно $q \in D$ нулевое решение. Для данных $H > 0$ и $a > 0$ введем в рассмотрение множества

$$Q_H = \{(p,q) \in \mathbf{R}^{n+m} : |p| \le H, q \in D\},$$

$$\Pi_a = \{(p_t\,(\cdot), q_t\,(\cdot)) \in C_{h,n} \times C_{h,m} : |p_t\,(s)| \le a\,, q_t\,(s) \in D, -h \le s \le 0\}.$$

Пусть для некоторого $H > 0$ $v : Q_H \to \mathbf{R}$ есть функция Ляпунова для (8), т.е. полная производная этой функции вдоль решения системы (8) неположительна, $\dot{v}|_{(8)} \le 0$, и существуют монотонно возрастающие функции $a, b : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $a(0) = b(0) = 0$, такие, что

$$a(|p|) \le v(p,q) \le b(|p|)$$

для всех. $(p,q) \in Q_H$. Пусть, кроме того, существуют постоянные n_1, n_2, $0 < n_1 \le n_2$, такие, что

$$n_1|p_0| \le |p(t\,; t_0\,, p_0\,, q)| \le n_2|p_0|$$

при $t_0 \le t \le t_0 + 2h$ равномерно по $t_0 \ge 0$ и $(p_0, q) \in Q_H$.

3. Обозначим

$$\Phi(p_t\,, q_t\,, et\,, e) = \frac{\partial v}{\partial p}R(p_t\,, q_t\,, et\,, e) + eq^{-1}(e)\frac{\partial v}{\partial q}G(p_t\,, q_t\,, et\,, e).$$

Фиксируем некоторое H_0, $0 < H_0 < H$, и положим $l_0 = b^{-1}(a(H_0))$.

Теорема. *Пусть начальная функция* $x(\cdot)$ *в* (2) *такова, что* $\|x(\cdot) - j\,(y\,(\cdot))\| \le l_0$, $eq^{-1}(e) \to 0$ *при* $e \to 0$ *и для сколь угодно малого* $h > 0$ *существуют* $l = l(h) > 0$, $d = d(h) > 0$ *такие, что при всяком выборе* p_0, $|p_0| > h$, $t_0 \ge 0$, $q_0 \in D$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(p_t^0, q_t^0, et, e)\Big|_{e=0} dt \le -d\,\Delta t \tag{9}$$

при $\Delta t \ge l$, *где* $p^0(t)$ *есть решение уравнения* (8) *при* $p^0(0) = p_0$, $q = q_0$, *а* $q^0(t) \equiv q_0$.

Тогда существует $e_0 = e_0(h) > 0$ *такое, что при всех* $e \in [0, e_0]$ *решение* $x(t,e)$, $y(t,e)$ *уравнения* (1) *существует и единственно на сегменте* $[0,T]$ *и при* $e \to 0$

$$y(t,e) \to \bar{y}(t) \text{ равномерно по } t \in [0,T],$$

$$x(t,e) \to \bar{x}(t) = j\,(\bar{y}(t)) \text{ равномерно по } t \in [t_0, T],$$

где $t_0 = O(eq^{-1}(e))$.

Замечание. Отметим асимптотическое расширение $(t_0 = O(eq^{-1}(e)))$ *пограничного слоя* вблизи левого конца отрезка определения решения сингулярно возмущенного уравнения, в котором сходимость $x(t,e) \to \bar{x}(t)$ неравномерная, по сравнению с теоремой Тихонова для обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2], где $t_0(e) = O(e)$.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и в [4], и опирается на следующие свойства решений системы (7), устанавливаемые с помощью методики, изложенной в статьях [5, 6].

Лемма 1. *Для сколь угодно малого* $b > 0$ *и любых* $p_0(\cdot), q_0(\cdot) \in \Pi_{l_0}$, $q_0(0) = y\,(0)$, *существуют* $e_0 > 0$ *и* $c_0 > 0$ *такие, что если* $e \in (0, e_0]$, *то:*

(а) решение $p(t, p_0, q_0, e)$, $q(t, p_0, q_0, e)$ *системы* (7) *существует и единственно на асимптотически большом промежутке* $0 \le t \le T_0(e)$, $T_0(e) = c_0 q^{-1}(e)$;

(б) $q(t, p_0, q_0, e) \in D$ *при* $0 \le t \le T_0(e)$;

(в) $|p(T_0(e), p_0, q_0, e)| \le b$.

Лемма 2. *Для сколь угодно малого* $a > 0$ *существуют* $b > 0$ *и* $e_0 > 0$ *такие, что если точка* $p_0(\cdot), q_0(\cdot) \in \Pi_b$, *то для любого* $e \in (0, e_0]$ $|p(t, p_0, q_0, e)| \le a$ *до тех пор, пока* $q(t, p_0, q_0, e) \in D$.

Из первой леммы следует, что условие (9), заменяющее требование асимптотической устойчивости корня $x = j(y)$, обеспечивает втягивание траекторий системы (1) в малую окрестность корня, а лемма 2 гарантирует, что траектории будут оставаться в этой окрестности, пока $y(t) \in D$.

Ряд технических приложений приводит к сингулярно возмущенным уравнениям, правые части которых содержат быстро осциллирующие коэффициенты (см., например, [7]). Нетрудно модифицировать данные выше утверждения на случай, когда функции r и g зависят еще и от $t = te^{-1}$.

Список использованной литературы

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник – 1948. – Т. 22(64), №2. – С. 193–204.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272с.
3. Фодчук В.І., Бігун Я. Й. и др. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. – К.: Інститут математики НАН України, 1996. – 210с.
4. Anashkin O.V. On Stability in Singularly Perturbed Nonlinear Systems // Proc. of Int. Conf. "Dynamical systems and related topics", Adv. Ser. Dyn. Syst. – Vol. 9 – Singapore: World Scientific. – 1991.– P.1–19.
5. Анашкин О.В. Об устойчивости систем функционально-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Динамические системы. – 1998. – Вып. 14. – С. 3–9.
6. Anashkin O.V. On Stability of Functional Differential Equations, Containing a Small Parameter // Functional Differential Equations. – 1999. – Vol.6, No.1-2. – P. 5–17.
7. Стрыгин В.В., Есипенко Д.Г. Асимптотика сингулярно возмущенной краевой задачей с быстро осциллирующими коэффициентами. // Тези конф. «Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань. Треті Боголюбовскі читання». – К.: Ін–т математики НАН України. – 1997. – С.171

Поступила в редколлегию 15.05.00