УДК 65.20

А.Т. БАРАБАНОВ, д. т. н., Севастоп. гос. техн. ун-т

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КЛАССЕ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

На основе предложенной полиномиальной формы частотного условия абсолютной устойчивости в классе систем с дифференцируемой нелинейностью получены новые, алгебраические критерии абсолютной устойчивости. Анализ полиномиальной формы критерия сводится к анализу локальных свойств многочленов и рациональной функции на вещественной отрицательной полуоси с помощью алгоритмов типа Рауса-Гурвица и вычисления вещественных отрицательных корней многочленов.

1.Постановка задачи. Будем рассматривать частотное неравенство В.А. Якубовича [1,2]

$$t_1[1+k\,\mathrm{Re}W(jw)]+q\,\mathrm{Re}\,jwW(jw)+t_2w^2\,\mathrm{Re}[1+kW(jw)]>0,\ w\geq 0 \quad (1.1)$$

– известный критерий абсолютной устойчивости в классе $\mathring{M}(0,k)$ систем с дифференцируемой нелинейностью при заданном $k>0$ и заданной передаточной функции $W(s)=p(s)/q(s)$ устойчивой линейной части системы $s(s)=-W(s)x(s)$. Для нелинейного звена $x=j(s)$ справедливо неравенство $0\leq\dfrac{dj(s)}{ds}\leq k$ и также неравенство $0\leq j(s)/s\leq k$. Многочлены $p(s), q(s)$ заданы

$$p(s)=b_0s^m+b_1s^{m-1}+\mathbf{K}+b_m,\ \ q(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\mathbf{K}+a_n,\ n>m.$$

В неравенстве (1.1) t_1,q,t_2 – вещественные параметры, причем $t_1\geq 0, t_2\geq 0, t_1+t_2>0$.

Если выполняется критерий В.М. Попова

$$1+k\,\mathrm{Re}W(jw)+q\,\mathrm{Re}\,jwW(jw)>0,\ w\geq 0,$$

то выполняется и критерий (1.1) (при $t_1=1,\ t_2=0$), однако обратное не обязательно. Другими словами, условие (1.1) может выполняться в более широком классе линейной части системы, чем неравенство В.М. Попова (но при сужении класса нелинейной части).

Замечание 1. Если $q\neq 0$, то в неравенстве (1.1) можно выполнить деление на $|q|$. Таким образом при анализе неравенства (1.1) можно ограничиться значениями $q\in\{-1,0,+1\}$. До замечания, в анализе неравенства (1.1) далее примем $t_1>0,t_2\geq 0$. Случай $q=0$ исключим как тривиальный (имеющий место при $1+k\,\mathrm{Re}W(jw)>0$).

Как и в [3] для частотных характеристик $P(w)=\mathrm{Re}W(jw)$, $Q(w)=\mathrm{Im}W(jw)$ воспользуемся представлениями

$$P(w)=\frac{1}{2}[W(jw)+W(-jw)],\ Q(w)=\frac{1}{2j}[W(jw)-W(-jw)],$$

которые позволяют записать их в виде

$$P(w)=A(x)/D(x);\ wQ(w)=B(x)/D(x),\quad x=-w^2, \qquad (1.2)$$

где

$$A(s^2)=\text{чет}\,p(s)q(-s),\ B(s^2)=\text{чет}\,(-s)p(s)q(-s),$$
$$D(s^2)=\text{чет}\,q(s)q(-s), \qquad (1.3)$$

где $\text{чет}(a_0+a_1s+a_2s^2+\mathbf{K})=a_0+a_2s^2+\mathbf{K}$.Здесь в силу устойчивости линейной части (полюсы $W(s)$ расположены в левой полуплоскости) $q(jw)\neq 0, \forall w$ и, следовательно, $D(x)>0$ при $x\leq 0$. Представления (1.2) позволяют записать частотное неравенство (1.1) в равносильной полиномиальной форме

$$p(x)=(t_1-t_2x)G(x)-qB(x)>0,\ x\leq 0, \qquad (1.4)$$

где $G(x)=D(x)+kA(x)$.

Задачу, которая здесь рассматривается, определяет вопрос, существуют ли значения параметров t_1,q,t_2, при которых неравенство (1.4) (а вместе с ним и (1.1)) выполняется для системы с заданным $W(s)$ и k? При положительном ответе на этот вопрос следует заключение об абсолютной устойчивости нелинейной системы [1,2].

Замечание 2. Пусть $r^-(p)$ – число всех различных вещественных отрицательных корней многочлена $p(x)$. Произвольно назначив параметры t_1,q,t_2, нетрудно проверить условие

$$p(0)>0 \text{ (или } p(-\infty)>0\text{)},\quad r^-(p)=0 \qquad (1.5)$$

его положительности, – в этом случае достаточное условие. Если оно не выполняется, следует рассмотреть другой набор параметров и т.д. На этом пути возможны полезные результаты. Привлекательна простота алгебраического критерия (1.5) – число $r^-(p)$ вычисляется алгоритмом типа Рауса-Гурвица [4]. Однако понятна и ограниченность подобной многошаговой процедуры, поскольку заранее не известен исход любого шага. Поэтому рассматривая полиномиальное неравенство (1.4), поставим задачу определить необходимые и достаточные условия его выполнения, т.е. существования параметров t_1,q,t_2, а также и соответствующей области их значений.

2.Исходные положения. Из определения многочленов (1.3) следует (см. также [3]) при $x\to 0$

$$A(x)=b_ma_n+\mathbf{K},\ B(x)=x(b_ma_{n-1}-b_{m-1}a_n)+\mathbf{K},\ D(x)=a_n^2+\mathbf{K}. \qquad (2.1)$$

Нетрудно также обнаружить, что при $x \to -\infty$

$$D(x) = a_0^2(-x)^n + \mathbf{K} \text{ и } G(-\infty) > 0, \tag{2.2}$$

а для рациональной функции

$$r(x) = B(x)/G(x) \tag{2.3}$$

имеем

$$r(-\infty) = 0, \quad r(-\infty) = -k\frac{b_0}{a_0} \tag{2.4}$$

для $m < n-1$ и $m = n-1$ соответственно.

Пусть $b_s < b_{s-1} < \mathbf{K} < b_1 < b_0 = 0$ и $g_l < g_{l-1} < \mathbf{K} < g_1$ – все различные вещественные отрицательные корни многочленов $B(x)$ и $G(x)$ соответственно.Имеет место следующее исходное утверждение (аналогичное [3]).

Лемма. *Если неравенство* (1.4), $t_1 > 0$ *выполняется, то*

1. $G(0) = a_n^2 + kb_m a_n > 0$; **2.** $G(b_i) > 0, i = \overline{1,s}$; **3.** *либо* $B(g_i) < 0, i = \overline{1,l}$, *либо* $B(g_i) > 0, i = \overline{1,l}$.

Замечание 3. Условие 3. леммы выполняется тогда и только тогда, когда корни $g_i, i = \overline{1,l}$ многочлена $G(x)$ принадлежат тем интервалам $(b_{i+1}, b_i), i = \overline{1,s}$, $b_{s+1} = -\infty$, в которых $B(x)$ имеет значения одного и того же знака.

Замечание 4. Условия 2.,3,леммы , можно записать в виде

1. $r^-(B) = r^-(B|G^+)$, 3. $r^-(G) = r^-(G|B^-)$ либо $r^-(G) = r^-(G|B^+)$.

Здесь $r^-(\bullet)$ – число всех различных вещественных отрицательных корней многочлена, а $r^-(\bullet|\bullet)$ – число таких корней, дающих другому многочлену значения указанного знака.

Указанные числа легко определяются с помощью алгоритмов типа Рауса - Гурвица [4], [3].

3.Алгебраический критерий абсолютной устойчивости в классе $M(0,k)$. Запишем неравенство (1.4) в виде

$$p(x) = G(x)[t_1 - t_2 x - qr(x)] > 0, \; x \le 0, \tag{3.1}$$

где $r(x) = B(x)/G(x)$, и будем его рассматривать при условиях леммы.

Замечание 4. Во всяком интервале $(b_{i+1}, b_i), i = \overline{1,s}, b_{s+1} = -\infty$ либо нет вовсе, либо содержится четное число тех корней $G(x)$, в которых этот многочлен меняет знак. Во всяком интервале $(g_{i+1}, g_i), i = \overline{1, l-1}$ либо нет вовсе, либо содержится четное число тех корней $B(x)$, в которых этот многочлен меняет знак.

В условии 3, леммы, примем для определенности одно из неравенств, например, первое (случай противоположного неравенства рассматривается аналогично). Итак, пусть $B(g_i)<0, i=\overline{1,s}$. Будем рассматривать ветви рациональной функции (2.3) – сужения на интервалы, определяемые ее точками разрыва $g_i, i=\overline{1,l}$. Будем различать ветви $r^+(x)$, определенные в интервалах отрицательности $G(x)$, и ветви $r^-(x)$, определенные в интервалах положительности $G(x)$. Ветви $r^+(x)$ и $r^-(x)$ имеют соответственно положительные и отрицательные бесконечные значения. Ветви $r^+(x)$ принимают только положительные значения, в то время как ветви $r^-(x)$ могут принимать значения и разных знаков (когда $B(x)$ меняет знак в интервале определения $r^-(x)$). Поскольку g_1 принадлежит интервалу отрицательности $B(x)$ и в силу того, что $G(0)>0, G(g_1+0)>0$, а $B(g_1)<0$, имеем $r(g_1+0)=-\infty$. Поэтому начальная ветвь может быть обозначена как $r_0^-(x)$.

Замечание 5. Если интервал $(b_1,0)$ – интервал отрицательности $B(x)$ (годограф $W(jw)$ идет от начальной точки $W(j0)$ вниз, т.е. $Q(0+)<0$ и $B(-0)<0$), содержащий корни $G(x)$, то $r_0^-(x)<0, x\in(g_1,0)$. Если же первым интервалом отрицательности, содержащим корни $G(x)$, будет, например, интервал (b_2,b_1), то $r_0^-(x)>0$ при $x\in(b_1,0)$ и $r_0^-(x)<0$ при $x\in(g_1,b_1)$. Для последней ветви (по отрицательной полуоси от начала, слева от прямой $x=g_l$) имеем $G(g_\mathbf{l}-0)>0$, т. к. $G(-\infty)>0$ и $B(g_\mathbf{l})<0$. Поэтому эту ветвь можно обозначить как $r_\mathbf{l}^-(x)$.

Замечание 6. Для ветви $r_\mathbf{l}^-(x)$, имеем $r_\mathbf{l}^-(-\infty)=0$ при $m<n-1$ и $r_\mathbf{l}^-(-\infty)=-kb_0/a_0$ в силу (2.4). Таким образом, ветвь $r_\mathbf{l}^-(x)$ всегда имеет горизонтальную асимптоту.

Наконец, полезно отметить, что экстремальные значения ветвей определяются корнями многочлена

$$E(x)=B'(x)G(x)-B(x)G'(x). \tag{3.2}$$

Вернемся теперь к неравенству (3.1). Поскольку в рассматриваемом случае $B(g_i)<0$, имеем $p(g_i)=-qB(g_i)$. Следовательно, необходимо принять $q>0$, и неравенству (3.1) можно придать равносильный вид (не меняя обозначение левой части)

$$p(x)=G(x)[d-ax-r(x)]>0, \tag{3.3}$$

где $r(x)=B(x)/G(x), d=t_1/\Theta, a=t_2/\Theta$ и в силу замечания 1: $d>0,\ a\geq 0$.

Введем в рассмотрение прямые

$$y = -ax + d \ . \tag{3.4}$$

Очевидно, что всякая прямая вида (3.4) делит плоскость (x, y) на две полуплоскости D^+, D^- сверху и снизу от прямой соответственно. Будем говорить, что прямая (3.4) разделяет ветви функции $r(x)$, когда все ветви $r^+(x)$ принадлежат полуплоскости D^+, а все ветви $r^-(x)$ – полуплоскости D^-.

Замечание 7. Если прямая (3.4) разделяет ветви $r(x)$, то $a \geq 0$, т.к. в противном случае она пересекала бы ветвь $r_{\mathbf{l}}^-(x)$, в силу замечания 6.

Среди прямых вида (3.4) выделим касательные прямые к ветвям функции $r(x)$. Для этого заметим, что параметры x_*, a_* касательной прямой из точки $(0,d)$ к кривой $r(x)$ определяют равенства

$$-a_* = r'(x_*), \quad -a_* x_* + d = r(x_*), \tag{3.5}$$

где $r'(x) = dr(x)/dx$. Т. к. $r(x) = B(x)/G(x)$ и $r'(x) = E(x)/G^2(x)$, где $E(x)$ определено равенством (3.2), то корни x_* (абсциссы точек касания) многочлена

$$F(x) = xE(x) + dG^2(x) - B(x)G(x) \tag{3.6}$$

в заданном интервале (g_{i+1}, g_i), $i = \overline{1, \mathbf{l}}$; $g_{\mathbf{l}+1} = -\infty$ определяют касательные прямые к ветви $r(x)$ в этом интервале.

Замечание 8. Поскольку $F(g_k) = g_k E(g_k) = -g_k B(g_k) G'(g_k)$, то во всяком интервале (g_{i+1}, g_i), определяемом соседними корнями $G(x)$ нечетной кратности, многочлен (3.6) имеет по крайней мере один корень.

Анализируя неравенства (3.1), (3.3), выделим случаи: 1. $G(x)$ не меняет знака на полупрямой $x \leq 0$; 2. $B(x)$ не меняет знака на полупрямой $x \leq 0$; 3. каждый из многочленов $B(x), G(x)$ меняет знак на полупрямой $x \leq 0$. Первые два случая будем называть простейшими, а третий – общим.

Замечание 9. Для простейших случаев имеет место следующее утверждение: 1. если $G(x)$ знака не меняет, т. е. $G(0) > 0$, $r^-(G) = 0$, то неравенство (3.3) выполняется, например, при $d = r_{\max}$, $a > 0$ (функция $r(x)$ не имеет разрывов и ограничена); 2. если $B(x) < 0$ знака не меняет, т. е. $r^-(B) = 0$, то неравенство (3.3) выполняется, например, при $0 < d < r_{\min}^+$, $a = 0$, где $r_{\min}^+$ – наименьшее значение функции $r(x)$ на ветвях $r^+(x)$ (ветви $r^+(x) > 0$; ветви $r^-(x) < 0$).

Рассмотрим общий случай. Пусть $a_{\min}^+$ и $a_{\max}^-$ наименьшее и наибольшее значение при заданном $d \geq 0$ среди значений параметра a

касательных прямых из точки $(0,d)$ к ветвям $r^{+}(x)$ и к ветвям $r^{-}(x)$ соответственно. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполняются условия леммы и* $B(g_i)<0,\ i=\overline{1,\mathbf{l}}$. *Тогда:* I. *для выполнения неравенства* (3.3) *необходимо и достаточно, чтобы в плоскости* (x,y) *существовала разделяющая прямая* (3.4); II. *для выполнения неравенства* (3.3) *необходимо и достаточно существование такого* $d\geq 0$, *чтобы выполнялись неравенства*

$$0\leq a^{-}_{\max}<a<a^{+}_{\min}. \tag{3.7}$$

Здесь первая и вторая часть представляет собой равносильные геометрическую и аналитическую формы утверждения.

Доказательство теоремы легко следует из вышеизложенного.

Необходимость. В точке касания x_* касательной прямой $y=-a^{+}_{*}x+d$ к какой-либо ветви $r^{+}(x)$ в силу (3.5) имеем

$$G(x_*)[d-ax_*-r^{+}(x_*)]=-G(x_*)(a-a^{+}_{*})x_*.$$

Т. к. в интервалах определения ветвей $r^{+}(x)$ $G(x)<0$, то для выполнения неравенства (3.3) в точке $x_*<0$ необходимо $a<a^{+}_{*}$. Аналогично, рассматривая какую-либо ветвь $r^{-}(x)$, получаем как необходимое неравенство $a>a^{-}_{*}$. Из подобных неравенств для всего множества ветвей следует как необходимое неравенство (3.7).

Достаточность. Пусть выполняются неравенства (3.7). Для всякой ветви $r^{+}(x)$

$$G(x)[d-a^{+}_{*}x-r^{+}(x)-(a-a^{+}_{*})x]>0,$$

т. к. $d-a^{+}_{*}x-r^{+}(x)\leq 0$ (ветвь расположена выше касательной), $a<a^{+}_{\min}\leq a^{+}_{*}$ и $G(x)<0$ в интервалах определения ветвей $r^{+}(x)$. Аналогично для всякой ветви $r^{-}(x)$ имеем

$$G(x)[d-a^{-}_{*}x-r^{-}(x)-(a-a^{-}_{*})x]>0,$$

т.к. $d-a^{-}_{*}x-r^{-}(x)\geq 0,\ a>a^{-}_{*}$ и $G(x)>0$ в интервалах определения ветвей $r^{-}(x)$. Наконец, если неравенства (3.7) выполняются при $d=0$, то они выполняются по непрерывности и при достаточно малом $d>0$. Теорема доказана.

Следствие. *При всяком* $d\geq 0$ *выше указан способ вычисления значений* $a^{-}_{\max}(d)$ и $a^{+}_{\min}(d)$. *Тем самым определена функция* $\Delta(d)=a^{+}_{\min}(d)-a^{-}_{\max}(d)$. *Если при* $d\geq 0$ *существует область положительных значений этой функции, то неравенство* (3.3), *а значит и неравенство* (3.1) *выполняется.*

Пример. Пусть $W(s)$ такова, что: 1. При некотором $J \in R^1$, $1/k + P(w) - JQ(w) > 0$, $w \ge 0$; 2. Если существуют значения w, такие что $1/k + P(w) = 0$, и w', w'' наименьшее и наибольшее из них, то $JQ(w) < 0$ при $w \in (w', w'')$ и $J \ne 0$.

В равносильной полиномиальной форме имеем: 1. $G(x) - \frac{J}{w} B(x) > 0, x \le 0$; 2. если $G(g) = 0$, то $JB(g) < 0$ и все g принадлежат одному интервалу отрицательности $JB(x)$. Нетрудно видеть, что все условия леммы выполнены.

Пусть для определенности $J > 0$ и $m = kJ$. Тогда $B(g) < 0$, причем $g_1 = -w'^2$ и $g_l = -w''^2$. Вне интервала (g_l, g_1) $G(x) > 0$. Запишем $p(x) = G(x)(d - ax) - B(x)$ в виде $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, где $p_1(x) = (d - ax)[G(x) - \frac{m}{w} B(x)]$ и $p_2(x) = y(x)B(x)$, $y(x) = (-ax + d)\frac{m}{w} - 1$, $x = -w^2$. При $a > 0$ и $d > 0$ $p_1(x) > 0$. Выберем их так, чтобы $wy(x) = am(w - w')(w - w'')$, т.е. $am = 1/(w' + w'')$, $dm = w'w''/(w' + w'')$ Тогда $y(x) < 0$, если $x \in (g_1, g_l)$, и $y(x) > 0$ вне указанного интервала. Теперь имеем следующее. Если $x \in (g_l, g_1)$, т.е. $w \in (w', w'')$, то $y(x) < 0$ и $B(x) < 0$, а значит $p_2(x) > 0$ и $p(x) > 0$ (т.к. $p_1(x) > 0$). Пусть $x \notin (g_l, g_1)$, а тогда $y(x) > 0$ и $G(x) > 0$. Для тех x, при которых $B(x) < 0$, $p(x) > 0$ по исходному выражению. Для тех же x, при которых $B(x) > 0$ имеем $p_2(x) > 0$ и $p(x) > 0$. Наконец, $p(g) = -B(g) > 0$. Значит, при всех $x \le 0$ неравенство (3.3) (а с ним и (1.1) при $w \ge 0$) выполняется. При $J < 0$ рассмотрение аналогично.

Таким образом, частотные условия 1, 2 достаточны для выполнения условия абсолютной устойчивости (1.1) в классе $\mathring{M}(0,k)$ (см. теорему 4.8.1 в [2], условия которой, здесь несколько ослаблены).

В этом примере за счет дополнительного условия 1 оказалось возможным установить существование нужных $a > 0, d > 0$, не вычисляя их значений.

Заключение. Предложенная в настоящей статье теорема дает полный ответ на вопрос о существовании параметров t_1, q, t_2, при которых частотное условие абсолютной устойчивости в классе $\mathring{M}(0,k)$ выполняется. Необходимые и достаточные условия теоремы позволяют определить и соответствующие области значений параметров. Как и аналогичные результаты [3] для критерия В. М. Попова, результаты представленные в настоящей статье, позволяют алгебраическими методами выполнить локальный анализ критерия абсолютной устойчивости.

Список использованной литературы

1. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А. А. Красовского – М.:Наука, ГРФМЛ, 1987.–711 с.
2. А.А. Воронов. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.– М.:Наука, ГРФМЛ, 1979. – 335 с.
3. А.Т. Барабанов. Алгебраические критерии абсолютной устойчивости // Динам. системы –1999.– вып.15.– С. 3–13.
4. А.Т. Барабанов. Анализ распределения корней многочлена на основе обобщенной схемы Рауса. // Динам. системы – 1994. – вып.13.– С. 107–118.

Поступила в редколлегию 17.12.99