УДК 517. 956.4

Е.П. БЕЛАН, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

ВРАЩАЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Исследована задача бифуркации периодических орбитально устойчивых пространственно-неоднородных решений типа вращающихся волн, рождающихся из пространственно-однородного стационарного решения параболического уравнения с преобразованием поворота пространственной координаты. Рассматриваемое уравнение возникает при моделировании процессов самовоздействия светового поля в оптическом резонаторе с распределенной обратной связью.

1. Введение. Изучаются автоколебательные режимы в оптическом резонаторе [1], связанные с поворотом поля в контуре обратной связи вокруг оптической оси.

В экспериментах по исследованию ротационной неустойчивости наблюдались многолепестковые вращающиеся структуры (оптические ревербераторы). Изменение угла поворота приводило к изменению скорости и направления вращения структур (при некоторых углах поворота структуры оставались неподвижными). Определяющее влияние на развитие пространственно-временной упорядоченности оказывает изменение: интенсивности входного поля, угла поворота поля.

Для описания фазы световой волны при повороте поля на угол h в контуре обратной связи в [1] использовались уравнения

$$\partial u / \partial t + u = D\Delta u + K(1+g\ \cos u_h)\,, \tag{1}$$

$$\partial \mathrm{u}/\partial n\ |_{\partial S} = 0\,, \tag{2}$$

$$u\,|_{t=o} = u_0, u_0 = u_0(r,q)\,. \tag{3}$$

Здесь S – круг единичного радиуса с центром в начале, Δ – двумерный оператор Лапласа, n – нормаль к границе ∂S, (r,q) – полярные координаты в S, $u_h(r,q) = u(r,q+h)$, $D > 0$ – коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < g \le 1$ – видность интерференционной картины, $K > 0$ – коэффициент пропорциональный интенсивности светового потока.

В работах [1] – [2] возникновение пространственно-неоднородных вращающихся структур связывалось с потерей устойчивости стационарного пространственно-однородного режима. На этом пути в [1] – [2] найдены формулы для пространственного периода и временной частоты вращающихся структур типа многолепестковых волн.

В работах [3], [4], [5] доказаны теоремы существования и единственности периодических решений типа бегущих, многолепестковых волн, получены их разложения по степеням малого параметра, исследована их устойчивость.

Бифуркация рождения периодических решений задач вида (1) – (3) для двумерных гладких областей при общих предположениях о преобразованиях областей исследована в [6] , [7].

В настоящей статье найдены явные выражения для асимптотик рождающихся периодических решений и для величин, определяющих характер бифуркации. Рассмотрен случай критических углов поворота.

2. Линеаризация. Обозначим H^l шкалу пространств, порожденную оператором $-\Delta$ при граничных значениях (2). Норма в этих пространствах задается формулой

$$|u|_l^2 = < -\Delta^l u, u > + < u, u > .$$

Заметим, что $H^l \subset H^l(S)$, где $H^l(S)$ – пространство Соболева со скалярным произведением

$$< u, v >_l = \sum_0^1 \int_S \partial^a \bar{u}(x) \partial^a v(x) dx ,$$

и норма $H^l(S)$, суженная на H^l, эквивалентна норме в H^l.

Следуя [8] , нетрудно убедится, что задача (1) – (3) порождает в пространстве H^1 нелинейную аналитическую полугруппу.

Пространственно-однородные стационарные решения задачи (1) – (2) являются решениями уравнения

$$w = K(1 + \cos w). \tag{4}$$

Решения этого уравнения рассмотрим при фиксированном g .

Условие 1. Уравнение (4) при $K = \acute{K}$ имеет решение $w = \acute{w}$ и

$$1 + \acute{K} g \sin \acute{w} \neq 0.$$

Тогда, согласно [3] в некоторой окрестности точки $m = 0$ существует аналитическая функция $w = w(m), w(0) = \acute{w}$, удовлетворяющая уравнению (4) при $K = \acute{K} + m$. Справедливо следующее равенство

$$w'(0) = (1 + g \cos \acute{w}) / (1 + \acute{K} g \sin \acute{w}).$$

Исследование решений задачи (1) – (2) в окрестности $w(m)$ заменой $u = w + v$ сводится к аналогичной проблеме для нулевого решения в задаче

$$dv / dt = L(m)v + R(v, m), \qquad (5)$$

где

$$L(m)v = D\Delta v - v - Kg \sin w v_h,$$
$$R(v, m) = K[\cos(w + v_h) - \cos w + v_h \sin w].$$

Обозначим $\Lambda = -Kg \sin w$, $l_1 = -g((\sin w + Kw'(0)\cos w)$.

Функции $J_p(\mathrm{j}'_{\mathrm{p,k}} r)e^{ipq}$, $J_p(\mathrm{j}'_{\mathrm{p,k}} r)e^{-ipq}$, где J_p функция Бесселя первого рода порядка p, $J'_p(\mathrm{j}'_{\mathrm{p,k}}) = 0$, являются собственными функциями оператора $L(m)$: $L(m)J_p(\mathrm{j}'_{\mathrm{p,k}} r)e^{ipq} = l_{p,k} J_p(\mathrm{j}'_{\mathrm{p,k}} r)e^{ipq}$,

где

$$l_{p,k}(m) = d_{p,k}(m) + iw_{p,k}(m),$$

$$d_{p,k} = -D(\mathrm{j}'_{\mathrm{p,k}})^2 - 1 - Kg \sin w \cos(ph),$$

$$w_{p,k} = -Kg \sin w \sin(ph).$$

Для исследования рождающихся из стационара устойчивых периодических решений предположим, что выполнено условие.

Условие 2. Существуют такие $m, k (m > 0)$, что $d_{m,k}(0) = 0$,

$$d'_{m,k}(0) = l_1 \cos mh \neq 0, \quad d_{p,s}(0) < d < 0, \ \forall p, s : p \neq \pm m, s \neq k.$$

Из условия 2 следует, что $k = 1$, $\Lambda < -1$, $\sin w > 0$.

3. Центральные многообразия. Оператор $-L(0)$ в пространстве H с областью определения H^2 является секториальным оператором [8]. Уравнение (8) инвариантно относительно группы вращения $q \to q + a, a \in R$. Обозначим $N_m = Span(e^{imq}, e^{-imq}) J_m(j'_{m,1} r)$. Зафиксируем натуральное $s \geq 4$. Согласно [8], [9] надстроенная над уравнением (5) система имеет C^s гладкое экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие M касательное к $N_m \times R$ в нуле и инвариантное относительно группы вращения. Следовательно, центральное многообразие M уравнение (5) представимо в виде

$$M = \{v = (ze^{imq} + \bar{z}e^{-imq})J_m(j'_{m,1}r) + \mathrm{Re}\sum_{s\neq 1} z^s e^{imsq} s_{s,k}(z\bar{z}, m)J_{s,m}(j'_{sm,k}r)\}, \quad (6)$$

где $s_{s,0}(r,m), s_{s,k}(r,m), k = 2,\ldots$ гладкие по (r,m) в окрестности $(0,0)$ функции.

На M уравнение (5) имеет нормальную форму Пуанкаре [10] – [11]

$$dz/dt = (l_{m,1}(m) + \sum_1^{\infty} c_k(m)(z\bar{z})^k)z. \quad (7)$$

Ряд в правой части этого уравнения асимптотически сходится в окрестности (0,0) к s – гладкой функции.

Для вычисления $c_1(0) = c_1$ определяются $s_{0,k}(r,0), s_{2,k}(r,0)$. С целью сокращения опустим их представления, учтя в дальнейших теоремах, и приведем формулу для c_1

$$c_1 = e^{imh}(-\Lambda a_0/2 + (\overset{)}{K}g\cos w)^2\sum_1^{\infty} b_{0k}^2(a_{0k}a_k^0)^{-1} + b_{1k}^2(2a_{1k}a_k^1)^{-1}). \quad (8)$$

Здесь

$$a_0 = \int_0^1 J_m^4(j'_{m,1})rdr, \quad (9)$$

$$a_k^0 = \mathrm{D}(\mathrm{j}'_{0,\mathrm{k}})^2 + 1 - \Lambda, \quad (10)$$

$$a_k^1 = a_k^1(h) = 2iw_{m,1}(0) + D(j'_{2m,k})^2 + 1 - \Lambda\exp 2imh, \quad (11)$$

$$b_{0k} = \int_0^1 J_m^2(j'_{m,1}r)J_0(j'_{0,k}r)rdr, \quad a_{0\mathrm{k}} = \int_0^1 J_0^2(j'_{0,k})rdr, \quad (12)$$

$$b_{1k} = \int_0^1 J_m^2(j'_{m,1}r)J_{2m}(j'_{2m,k}r)rdr, \qquad a_{1k} = \int_0^1 J^2{}_{2m}(j'_{2m,k}r)rdr. \quad (13)$$

Из равенств (9) – (13) и условия 2 следует, что $\mathrm{Re}\,c_1 < 0$. Поэтому [10], [11] система (7) при $d'_{m,1} > 0$ и достаточно малых $m > 0$ имеет орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение

$$z = e\,e^{iw(e)t}, \quad (14)$$

где

$$\mathrm{Re}\,l_{m,1} + \sum_1^{\infty}\mathrm{Re}\,c_k(m)e^{2k} = 0, \quad (15)$$

$$w(e) = \mathrm{Im}\,l_{\mathrm{m},1} + \sum_1^{\infty}\mathrm{Im}\,c_k(m)e^{2k}. \quad (16)$$

Периодическое решение (14) является единственным периодическим решением (7) в окрестности (0,0).

4. Существование и единственность периодических решений. Используя равенства (6), (14) – (16), теоремы о центральных многообразиях [8], [9], [11] приходим к теореме.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1, 2. Предположим, что* $w_{m,1}(0) \neq 0$, $d'_{m,1}(0) > 0$. *Тогда существует такое* $m_0 > 0$, *что при* $0 < m < m_0$ *задача (1) – (2) имеет орбитально асимптотически устойчивое в* H^1 *периодическое по* t *решение* $u_m = u_m(r,h,m)$ $(h = w(m)t + mt)$, *где*

$$u_m = w + m^{1/2} J_m(j'_{m,1} r) 2a \cosh - ma^2 \breve{K}g \cos w \Big(\sum_1^{\infty} J_0(j'_{0,k} r) b_{0,k} (a_{0,k} a^0{}_k)^{-1} +$$

$$+ \operatorname{Re} e^{2\mathrm{im}(h+\mathrm{h})} \sum_1^{\infty} J_{2m}(j'_{2m} r) b_{1k} (a_{1k} a_k{}^1(h))^{-1} + \ldots, \qquad (17)$$

$$a = (-l_1 \cos mh / \operatorname{Re} c_1)^{1/2}, \quad w(m) = -Kg \sin w \sin mh + \operatorname{Im} c_1 a^2 + \ldots,$$

а c_1, b_{0k}, a_{0k}, a_k^0, b_{1k}, a_{1k}, $a_k^1(h)$, *определены в (8) – (13).*

Периодическое решение u_m *задачи (1) – (2) в окрестности* $u = \breve{w}$, $m = 0$ *единственно.*

Замечание. Свойства выражения вида (17), определяющего вращающуюся волну задачи (1) – (2), проанализированы в [12] (см. (8.43)).

5. Периодические решения в вырожденном случае. Пусть выполнены условия 1, 2. Предположим, что

$$w_{m,1}(0) = \Lambda \sin mh = 0. \qquad (18)$$

Условие (18), учитывая что $\Lambda < -1$, $\cos mh < 0$, приводит к равенству $mh = (2s+1)p$ при некотором натуральном s. Соответствующее значение h обозначим $\breve{h}$. Предположим

$$d'_{m,1}(0) = g(\sin \breve{w} + \breve{K} w'(0) \cos \breve{w}) > 0. \qquad (19)$$

Положим в (5) $h = \breve{h} + n$ и запишем полученное уравнение в виде

$$dv/dt = L(m,n)v + R(v,m,n). \qquad (20)$$

Это уравнение удовлетворяет условиям существования гладкого центрального многообразия $\breve{M}$ в окрестности нуля. Можно считать, что многообразие $\breve{M}$ совпадает с построенным выше многообразием M, в котором $h = \hat{h} + n$. Заметим также, что многообразие $\hat{M}$ инвариантно относительно группы отражения $n \to -n$, $z \to \bar{z}$, $q \to -q$. Уравнение (20) на многообразии $\hat{M}$ принимает вид

$$dz/dt = l_{m,1}(m,n)z + \sum_{1}^{\infty} c_k(m,n)z(z\bar{z})^k \tag{21}$$

где

$$l_{m,1}(m,n) = s + iKg\sin w\sin mn, \quad s = Kg\sin w\cos mn - \hat{K}g\sin\hat{w},$$

$$\operatorname{Re} c_k(m,-n) = \operatorname{Re} c_k(m,-n), \quad \operatorname{Im} c_k(m,-n) = -\operatorname{Im} c_k(m,-n),$$

$$c_1 = -e^{\operatorname{Im} n}(-\Lambda a_0/2 + \hat{K}g\cos\hat{w})^2 \left(\sum_{1}^{\infty} b_{0k}^2 (a_{0k}a_k^0)^{-1} + b_{1k}^2 (2a_{1k}a_k^1)^{-1}\right), \tag{22}$$

$c_1 = c_1(0,0)$, а $a_0, b_{0k}, a_{0k}, a_k{}^0, b_{1k}, a_{1k}, a_k{}^1 = a_k{}^1(n)$ определены в (9) – (13). Так как согласно (19) $s_m(0,0) = d'_{m,1}(0) > 0$, то отображение $(m,n) \to (s,n)$ в окрестности (0,0) является обратимым. Обратное отображение является аналитическим. Перейдем в семействе уравнений (21) к параметрам (s,n) и соответствующие коэффициенты асимптотически сходящегося ряда обозначим $\hat{c}_k(s,n)$. Очевидно $\hat{c}_k(0,0) = c_k(0,0)$. Справедливы также равенства

$$\operatorname{Re}\hat{c}_k(s,-n) = \operatorname{Re}\hat{c}_k(s,-n), \quad \operatorname{Im}\hat{c}_k(s,-n) = -\operatorname{Im}\hat{c}_k(s,-n).$$

Уравнение

$$e\left(s + \sum_{1}^{\infty}\operatorname{Re}\hat{c}_k(s,-n)e^2\right) = 0, \quad e > 0$$

запишем в виде

$$q(s,n,e) = se + \operatorname{Re} c_1 e^3 + f(s,n,e) = 0, \tag{23}$$

где $f(s,n,e) = o(|e|^3 + |se|^3 + |ne^2|)$.

Используя модифицированный метод ломаных Ньютона [8], неравенство $\operatorname{Re} c_1 < 0$, приходим к заключению, что существуют такие положительные s_0, n_0, что при $0 < s < s_0$, $|n| < n_0$ уравнение (23) имеет единственное гладкое положительное решение $e_+(s,n)$ такое, что

$$e_+(s,n) = (-s/\operatorname{Re} c_1)^{1/2} + O(s,n), \quad q_e(s,n,e_+(s,n)) < 0.$$

Обозначим $e_+(s(m,n),n) = e^+(m,n)$. Заметим, что $e^+(m,-n) = e^+(m,n)$, $s(m,0) > 0$ при $m > 0$.

Таким образом, уравнение (21) при $m > 0, n = 0$ имеет семейство состояний равновесия, заполняющих окружность $|z| = e^+(m,0)$. Это инвариантное многообразие является орбитально асимптотически устойчивым. Уравнение (21) при малых $|n|\neq 0$, $m>0$, таких, что $s(m,n)>0$, имеет периодическое решение, орбитой которого является окружность $|z|=e^{+}(m,n)$, а движение по ней осуществляется с частотой $w(m,n)$ $(w(m,-n)=-w(m,n))$, где

$$w(m,n)=Kg\sin w\sin mn - s\ \operatorname{Im}c_1/\operatorname{Re}c_1+\ldots.$$

Следовательно, при переходе n через 0 происходит смена направлений движения фазовых точек.

Из теоремы сведения следует теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда существуют такие* $m_0>0$, $n_0>0$, *что при* $0<m<m_0$, $|n|<n_0$ *в области изменения параметров* m, n, *определяемых неравенством* $s>0$, *задача (1) – (2) имеет орбитально асимптотически устойчивое в* H^1 *периодическое по* t *решение* $u_m=u_m(r,h,m,n)$, $(h=w(m,n)t+mt)$, *где*

$$u_m=w+(-s\ /\operatorname{Re}c_1)^{1/2}J_m(j'_{m,1})2\cos h+$$
$$+(s\,(\operatorname{Re}c_1)^{-1})\hat{K}g\cos\hat{w}(\sum_1^{\infty}J_0(j'_{0,k}r)b_{0k}(a_{0k}a_k^{0})^{-1}+$$
$$+\operatorname{Re}e^{2i(h+mn)}\sum_1^{\infty}J_{2m}(j'_{2m,k}r)b_{1k}(a_{1k}a_k^{1}(n)^{-1})+\ldots,$$

b_{0k}, a_{0k}, a_k^0, b_{1k}, a_{1k}, $a_k^1(n)$ *определены в (9) – (13), а* c_1 *определена в (22)*.

Периодическое решение u_m *задачи (1) – (2) в окрестности* $u=\hat{w}$, $m=0$, $n=0$ *единственно.*

Список использованной литературы

1. Ахманов С.А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей //Новые принципы оптической обработки информации.– М.: Наука, 1990. –С. 263–325.
2. Воронцов М.А., Друмаревский Ю.Д., Пруидзе Д.В., Шмальгаузен В.И. Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью//Изв. АН СССР.Физика. –1988. –Т. 52, N.2. –С. 374–376.
3. Разгулин А.В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журнал вычислительной математики и математической физики. –1993. –Т. 33, N.1. –С. 69–80.

4. Разгулин А.В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журнал вычислительной математики и математической физики. –1993. –Т. 33, N.10. –С. 1499–1508.
5. Ruzgulin A.V. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback. – In Chaos in Optics. ed. Rajarshi Roy. Proceedings SPIE– 1993.– 2039– P. 342–352.
6. Skubachevskii A.L. Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Analisis. Theory. Methods & Applications. –1998.– Vol. 12, No.2. –P. 261 – 278.
7. Скубачевский А.Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического-функциального-дифференциального уравнения// Дифференциальные уравнения.–1998. –Т. 34, N.10. –С. 1394–1401.
8. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. : Пер. с англ. –М.: Мир, 1985. – 376 с.
9. Марсден Дж., Мак- Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. – : Пер. с англ. М.: Мир, 1980. – 368 с.
10. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1978. – 304 с.
11. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – : Пер. с англ. М.: Мир, 1985. – 280 с.
12. Николис Г., Пригожин Н. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – : Пер. с англ. М.: Мир, 1979. – 512 с.

Поступило в редколлегию 16.06.2000