

Список использованной литературы

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
2. Гольцев А. С. Фундаментальное решение уравнений термоупругости для тонких ортотропных пластин в случае теплообмена // Труды междунар. науч. конф. "Современные проблемы концентрации напряжений". – Донецк: Донец. гос. ун-т, "Кассиопея", 1998. – С. 56–60.
3. Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7)
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 311 с.
5. Швец Р. Н., Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикл. механика. – 1971. – 7, №10. – С. 121–125.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
7. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учебное пособие. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
8. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Киев; Донецк: Вища школа, 1983. – 160 с.

Поступила в редколлегию 03.02.2000

УДК 537 + 539.3

В. Н. ЧЕХОВ, докт. физ.-мат. наук, А. Дж. А. СОУС, асп., Таврический нац. ун-т

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Для системы дифференциальных уравнений статики упругих трансверсально-изотропных пологих оболочек найдено представление решения в виде степенного ряда по параметру, характеризующему отличие формы срединной поверхности от сферической. Получены рекуррентные формулы, позволяющие решать краевые задачи методом малого параметра в произвольном приближении.

1. Постановка задачи. Однородная система разрешающих дифференциальных уравнений статики упругих трансверсально-изотропных пологих оболочек представляется [1] в виде:

$$\Delta\Delta j - Eh\Delta_k w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{D}\Delta_k j - \frac{1}{K}\Delta\Delta_k j = 0, \quad \Delta c - \frac{2K}{(1-n)D}c = 0.$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; Δ_k – дифференциальный оператор второго порядка, зависящий от значений k_1, k_2 нормальных кривизн срединной поверхности; φ, χ, w – функция напряжений, функция поперечного сдвига и прогиб оболочки; E, ν, K – коэффициенты упругости материала оболочки; h – толщина оболочки; $D = Ehc^2$, где $c = h/\sqrt{12(1-n^2)}$.

Параметр ε , характеризующий отличие формы срединной поверхности от сферической, вводим посредством зависимостей:

$$k_1 = \frac{1-e}{R_0}, \quad k_2 = \frac{1+e}{R_0}, \quad \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \quad (1.1)$$

Заменой полугеодезических координат r, θ и функции напряжений j :

$$r = \frac{r}{\sqrt{cR_0}}, \quad x = r \cos J, \quad h = r \sin J, \quad j = EhcU, \quad (1.2)$$

систему дифференциальных уравнений преобразуется к виду:

$$\nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w + e \left(\frac{\partial^2 w}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2d \nabla^2 \nabla^2 U - e(1 - 2d \nabla^2) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 0; \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 c - g^2 c = 0. \quad (1.4)$$

Здесь ∇^2 – оператор Лапласа в переменных r, J ; $g = 1/\sqrt{(1-n)d}$; $d = Ehc/(2KR_0)$ – параметр, характеризующий влияние поперечного сдвига. Если $d = 0$, то система (1.3) соответствует теории пологих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява.

В рамках классической теории построено представление решения [2], позволяющее решать краевые задачи методом малого параметра в любом приближении. Аналогичное представление решения для трансверсально-изотропной полой оболочки предлагается ниже на основе аналитического решения [3] для полой сферической трансверсально-изотропной оболочки (система (1.3), (1.4) в случае $e = 0$).

2. Уравнения метода малого параметра. Согласно методике работы [2] решение системы (1.3), (1.4) представляется в виде рядов Фурье. Ограничимся, как и в работе [2], симметрией, соответствующей кручению оболочки:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n}(r) \sin 2nq, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_{2n}(r) \sin 2nq,$$

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}(r) \cos 2nq. \quad (2.1)$$

Для коэффициентов в рядах (2.1) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta_{2n} (\Delta_{2n} U_{2n} - w_{2n}) &= -e(L_{2n}^{(1)} w_{2n-2} + L_{2n}^{(2)} w_{2n+2}), \\ \Delta_{2n} (\Delta_{2n} w_{2n} + U_{2n} - 2d \Delta_{2n} U_{2n}) &= \\ &= e(1 - 2d \Delta_{2n})(L_{2n}^{(1)} U_{2n-2} + L_{2n}^{(2)} U_{2n+2}), \quad \Delta_{2n} c_{2n} - g^2 c_{2n} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введены операторы
$$L_{2n}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3-4n}{r} \frac{d}{dr} + 4n \frac{n-1}{r^2} \right),$$

$$L_{2n}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3+4n}{r} \frac{d}{dr} + 4n \frac{n+1}{r^2} \right), \quad \Delta_{2n} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4n^2}{r^2}.$$

Решение системы (2.2) представляется в виде степенных рядов по параметру e

$$U_{2n} = \sum_{l=0}^{\infty} e^l U_{2n}^{(l)}(r), \quad w_{2n} = \sum_{l=0}^{\infty} e^l w_{2n}^{(l)}(r), \quad c_{2n} = \sum_{l=0}^{\infty} e^l c_{2n}^{(l)}(r). \quad (2.3)$$

Коэффициенты удовлетворяют бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{2n} (\Delta_{2n} U_{2n}^{(l)} - w_{2n}^{(l)}) &= -L_{2n}^{(1)} w_{2n-2}^{(l-1)} - L_{2n}^{(2)} w_{2n+2}^{(l-1)}, \\ \Delta_{2n} (\Delta_{2n} w_{2n}^{(l)} + U_{2n}^{(l)} - 2d \Delta_{2n} U_{2n}^{(l)}) &= \\ &= (1 - 2d \Delta_{2n})(L_{2n}^{(1)} U_{2n-2}^{(l-1)} + L_{2n}^{(2)} U_{2n+2}^{(l-1)}), \\ \Delta_{2n} c_{2n}^{(l)} - g^2 c_{2n}^{(l)} &= 0, \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

Для начального приближения ($l = 0$) система (2.4) является однородной. Вид ее аналитического решения, зависит [3] от параметра d , характеризующего влияние поперечных сдвигов. В диапазоне $0 \leq d < 1$ решение, убывающее при $r \rightarrow \infty$, может быть представлено в форме:

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(0)} &= C_{n,n}^{(0)} r^{-2n} + \text{Im}(a_{n,0}^{(0)} K_{2n}(sr)), \\ w_{2n}^{(0)} &= D_{n,n}^{(0)} r^{-2n} + \text{Im}(s^2 a_{n,0}^{(0)} K_{2n}(sr)), \quad c_{2n}^{(0)} = M_n^{(0)} K_{2n}(gr). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $C_{n,n}^{(0)}$, $D_{n,n}^{(0)}$, $M_n^{(0)}$ – вещественные постоянные, $a_{n,0}^{(0)}$ – комплексная постоянная, определяемые из пяти граничных условий (при каж-

дом значения n) для начального приближения; $K_{2n}(s r)$, $K_{2n}(g r)$ – функции Макдональда; $s = (\sqrt{1+d} + i\sqrt{1-d})/\sqrt{2}$, $g = 1/\sqrt{(1-n)d}$.

В предельном случае $d = 1$ начальное приближение имеет [3] вид:

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(0)} &= C_{n,n}^{(0)} r^{-2n} + A_{n,0}^{(0)} K_{2n}(r) + A_{n,1}^{(0)} r K_{2n-1}(r), \\ w_{2n}^{(0)} &= D_{n,n}^{(0)} r^{-2n} + (A_{n,0}^{(0)} - 2A_{n,1}^{(0)}) K_{2n}(r) + A_{n,1}^{(0)} r K_{2n}(r), \\ c_{2n}^{(0)} &= M_n^{(0)} K_{2n}(gr), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где 5 вещественных постоянных $C_{n,n}^{(0)}$, $D_{n,n}^{(0)}$, $A_{n,0}^{(0)}$, $A_{n,1}^{(0)}$, $M_n^{(0)}$ должны быть определены из граничных условий для начального приближения.

При $d > 1$ начальное приближение записывается [3] в форме:

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(0)} &= C_{n,n}^{(0)} r^{-2n} + A_{n,0}^{(0)} K_{2n}(wr) + B_{n,0}^{(0)} K_{2n}(w^{-1}r), \\ w_{2n}^{(0)} &= D_{n,n}^{(0)} r^{-2n} + w^2 A_{n,0}^{(0)} K_{2n}(wr) + w^{-2} B_{n,0}^{(0)} K_{2n}(w^{-1}r), \\ c_{2n}^{(0)} &= M_n^{(0)} K_{2n}(gr). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $w = \sqrt{d + \sqrt{d^2 - 1}}$.

3. Представление решения. Рекуррентные формулы. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4) требуется найти такое представление решения, которое сохраняет свою форму после подстановки этого решения в уравнения (2.4). Тогда равенства между коэффициентами при одинаковых функциях приводят к рекуррентным зависимостям между коэффициентами. Форма общего решения неоднородной системы (2.4), как и форма решений (2.5)–(2.7) однородной системы, зависит от параметра d , характеризующего влияние поперечных сдвигов. Соответственно получается три представления решения.

Для интервала $0 \leq d < 1$:

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(l)} &= \sum_{j=1}^n C_{n,j}^{(l)} r^{-2j} + \text{Im} \sum_{j=0}^l a_{n,j}^{(l)} r^j K_{2n-j}(sr), \\ w_{2n}^{(l)} &= \sum_{j=1}^n D_{n,j}^{(l)} r^{-2j} + \text{Im} \sum_{j=0}^l b_{n,j}^{(l)} r^j K_{2n-j}(sr), \quad c_{2n}^{(l)} = M_n^{(l)} K_{2n}(gr). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для предельного значения $d = 1$:

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(l)} &= \sum_{j=1}^n C_{n,j}^{(l)} r^{-2j} + \sum_{j=0}^{2l+1} A_{n,j}^{(l)} r^j K_{2n-j}(r), \\ w_{2n}^{(l)} &= \sum_{j=1}^n D_{n,j}^{(l)} r^{-2j} + \sum_{j=0}^{2l+1} E_{n,j}^{(l)} r^j K_{2n-j}(r), \quad c_{2n}^{(l)} = M_n^{(l)} K_{2n}(gr), \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для интервала $d > 1$:

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(l)} &= \sum_{j=1}^n C_{n,j}^{(l)} r^{-2j} + \sum_{j=0}^l r^j (A_{n,j}^{(l)} K_{2n-j}(wr) + B_{n,j}^{(l)} K_{2n-j}(w^{-1}r)), \\ w_{2n}^{(l)} &= \sum_{j=1}^n D_{n,j}^{(l)} r^{-2j} + \sum_{j=0}^l r^j (E_{n,j}^{(l)} K_{2n-j}(wr) + F_{n,j}^{(l)} K_{2n-j}(w^{-1}r)), \\ c_{2n}^{(l)} &= M_n^{(l)} K_{2n}(gr). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подстановка решения (3.1) в дифференциальные уравнения (2.4) приводит к рекуррентным соотношениям между вещественными коэффициентами степенного решения:

$$\begin{aligned} C_{n,1}^{(l)} &= \frac{n}{2(n-1)} C_{n-1,1}^{(l-1)} + \frac{n}{2(n+1)} C_{n+1,1}^{(l-1)}, \quad D_{n,1}^{(l)} = \frac{n}{2(n-1)} D_{n-1,1}^{(l-1)} + \frac{n}{2(n+1)} D_{n+1,1}^{(l-1)}, \\ C_{n,j}^{(l)} &= (n+j-1) \left(\frac{C_{n-1,j}^{(l-1)}}{2(n-j)} + 4d(n+j-2) C_{n-1,j-1}^{(l-1)} \right) - 4(n^2 - (j-1)^2) * \\ &* (2d C_{n,j-1}^{(l-1)} - D_{n,j-1}^{(l-1)}) + (n-j+1) \left(\frac{C_{n+1,j}^{(l-1)}}{2(n+j)} + 4d(n-j+2) C_{n+1,j-1}^{(l-1)} \right), \quad (3.4) \\ D_{n,j}^{(l)} &= -4(n^2 - (j-1)^2) C_{n,j-1}^{(l-1)} + \frac{n+j-1}{2(n-j)} D_{n-1,j}^{(l-1)} + \frac{n-j+1}{2(n+j)} D_{n+1,j}^{(l-1)}, \\ &\quad (2 \leq j \leq n-1). \end{aligned}$$

Рекуррентные формулы для комплексных коэффициентов при функциях Макдональда имеют более сложное строение:

$$\begin{aligned} b_{n,l}^{(l)} &= s^2 a_{n,l}^{(l)}, \quad \tilde{b}_{n,j}^{(l)} = \tilde{a}_{n,j}^{(l)} - \frac{1}{2} (s^2 b_{n-1,j}^{(l-1)} + s^{-2} \tilde{b}_{n+1,j}^{(l-1)}) \quad (j = \overline{l-1, 0}), \\ (1-s^4) a_{n,l}^{(l)} &= \frac{1}{2l} s^5 (a_{n-1,l-1}^{(l-1)} + a_{n+1,l-1}^{(l-1)}), \quad (1-s^4) \tilde{a}_{n,j}^{(l)} = \frac{s}{4j} (\tilde{b}_{n+1,j-1}^{(l-1)} + \\ &+ s^4 b_{n-1,j-1}^{(l-1)} + s^2 \tilde{a}_{n+1,j-1}^{(l-1)} + s^6 a_{n-1,j-1}^{(l-1)}) - (\tilde{b}_{n+1,j}^{(l-1)} + s^4 b_{n-1,j}^{(l-1)}) / 2 - \quad (3.5) \\ &- d \tilde{a}_{n+1,j}^{(l-1)} - d s^4 a_{n-1,j}^{(l-1)} - 2(j+1) s^3 \tilde{a}_{n,j+1}^{(l)}, \quad (j = \overline{l-1, 1}). \end{aligned}$$

Знаками тильды обозначены комбинации постоянных, получаемые по вспомогательным рекуррентным формулам:

$$\tilde{u}_{n,l}^{(l)} = s^2 u_{n,l}^{(l)}, \quad \tilde{u}_{n,j}^{(l)} = s^2 u_{n,j}^{(l)} - 2(j+1) s u_{n,j+1}^{(l)};$$

$$\tilde{u}_{n,l}^{(l)} = s^2 \tilde{u}_{n,l}^{(l)}, \quad \tilde{u}_{n,j}^{(l)} = s^2 \tilde{u}_{n,j}^{(l)} - 2(j+1)s \tilde{u}_{n,j+1}^{(l)}, \quad (j = \overline{l-1, 0}). \quad (3.6)$$

Вместо величин $u_{n,j}^{(l)}$ здесь должны быть подставлены $a_{n,j}^{(l)}$ или $b_{n,j}^{(l)}$.

В начальном приближении постоянные $a_{n,0}^{(0)}, C_{n,n}^{(0)}, D_{n,n}^{(0)}, M_n^{(0)}$ вычисляются из 5 граничных условий для каждого n . Рекуррентные формулы (3.4), (3.5) позволяют выразить все комплексные постоянные $a_{n,j}^{(l)}, b_{n,j}^{(l)}$ в представлениях решения (3.1), кроме $a_{n,0}^{(l)}$, и все вещественные постоянные $C_{n,j}^{(l)}, D_{n,j}^{(l)}$, кроме $C_{n,n}^{(l)}, D_{n,n}^{(l)}$, через постоянные, вычисленные в предыдущих приближениях. После этого постоянные $a_{n,0}^{(l)}, C_{n,n}^{(l)}, D_{n,n}^{(l)}, M_n^{(l)}$ вычисляются из граничных условий для приближения номер l .

В предельном случае ($d=0, s=p/4$) классической теории полых оболочек рекуррентные формулы (3.4), (3.5) совпадают с формулами, приведенными в работе [2] (с точностью до обозначений).

Рекуррентные зависимости (3.4) между постоянными $C_{n,j}^{(l)}, D_{n,j}^{(l)}$, справедливы при любых значениях параметра d , и остается записать рекуррентные формулы для коэффициентов при функциях Макдональда.

При значении $d=1$:

$$\begin{aligned} E_{n,2l+1}^{(l)} &= A_{n,2l+1}^{(l)}, \quad A_{n,2l+1}^{(l)} = \frac{1}{8l(2l+1)} (A_{n-1,2l-1}^{(l-1)} + A_{n+1,2l-1}^{(l-1)}), \\ E_{n,2l}^{(l)} &= \tilde{A}_{n,2l}^{(l)}, \quad \tilde{E}_{n,j}^{(l)} = \tilde{A}_{n,j}^{(l)} - \frac{1}{2} (E_{n-1,j}^{(l-1)} + \tilde{E}_{n+1,j}^{(l-1)}), \quad (j = \overline{2l-1, 0}), \\ \tilde{A}_{n,j}^{(l)} &= ((\tilde{E}_{n+1,j-2}^{(l-1)} + E_{n-1,j-2}^{(l-1)} + \tilde{A}_{n+1,j-2}^{(l-1)} + A_{n-1,j-2}^{(l-1)}) / (2j-2) - \\ &- 2\tilde{A}_{n+1,j-1}^{(l-1)} - 2A_{n-1,j-1}^{(l-1)} - \tilde{E}_{n+1,j-1}^{(l-1)} - E_{n-1,j-1}^{(l-1)}) / (4j), \quad (j = \overline{2l, 2}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Комбинации $\tilde{A}_{n,j}^{(l)}, \tilde{A}_{n,j}^{(l)}, \tilde{E}_{n,j}^{(l)}, \tilde{E}_{n,j}^{(l)}$ вычисляются по формулам вида (3.6):

$$\tilde{V}_{n,2l+1}^{(l)} = V_{n,2l+1}^{(l)}, \quad \tilde{V}_{n,j}^{(l)} = V_{n,j}^{(l)} - 2(j+1)V_{n,j+1}^{(l)}, \quad (j = \overline{2l, 0}).$$

Здесь $V_{n,j}^{(l)}$ принимает значения $A_{n,j}^{(l)}, \tilde{A}_{n,j}^{(l)}, E_{n,j}^{(l)}, \tilde{E}_{n,j}^{(l)}$.

На бесконечном интервале $d > 1$ рекуррентные зависимости между постоянными в представлении (3.3) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 E_{n,l}^{(l)} &= w^2 A_{n,l}^{(l)}, \quad F_{n,l}^{(l)} = w^{-2} B_{n,l}^{(l)}, \quad \tilde{E}_{n,j}^{(l)} = \tilde{A}_{n,j}^{(l)} - \frac{1}{2}(w^2 E_{n-1,j}^{(l-1)} + \\
 &+ w^{-2} \tilde{E}_{n+1,j}^{(l-1)}), \quad \tilde{F}_{n,j}^{(l)} = \tilde{B}_{n,j}^{(l)} - \frac{1}{2}(w^{-2} F_{n-1,j}^{(l-1)} + w^2 \tilde{F}_{n+1,j}^{(l-1)}), \quad (j = \overline{l-1, 0}), \\
 (w^4 - 1)A_{n,l}^{(l)} &= \frac{-1}{2l} w^5 (A_{n-1,l-1}^{(l-1)} + A_{n+1,l-1}^{(l-1)}), \quad \tilde{A}_{n,j}^{(l)} = \left(\frac{-w}{4j}\right) (\tilde{E}_{n+1,j-1}^{(l-1)} + \\
 &+ w^4 E_{n-1,j-1}^{(l-1)} + w^2 \tilde{A}_{n+1,j-1}^{(l-1)} + w^6 A_{n-1,j-1}^{(l-1)}) + (\tilde{E}_{n+1,j}^{(l-1)} + w^4 E_{n-1,j}^{(l-1)})/2 + \\
 &+ d \tilde{A}_{n+1,j}^{(l-1)} + d w^4 A_{n-1,j}^{(l-1)} + 2(j+1)w^3 \tilde{A}_{n,j+1}^{(l)} / (w^4 - 1), \quad (j = \overline{l-1, 1}), \quad (3.8) \\
 (1 - w^{-4})B_{n,l}^{(l)} &= \frac{1}{2l} w^{-5} (B_{n-1,l-1}^{(l-1)} + B_{n+1,l-1}^{(l-1)}), \quad \tilde{B}_{n,j}^{(l)} = \left(\frac{1}{4j} w^{-1}\right) (\tilde{F}_{n+1,j-1}^{(l-1)} + \\
 &+ w^{-4} F_{n-1,j-1}^{(l-1)} + w^{-2} \tilde{B}_{n+1,j-1}^{(l-1)} + w^{-6} B_{n-1,j-1}^{(l-1)}) - (\tilde{F}_{n+1,j}^{(l-1)} + w^{-4} F_{n-1,j}^{(l-1)})/2 - \\
 &- d \tilde{B}_{n+1,j}^{(l-1)} - d w^{-4} B_{n-1,j}^{(l-1)} - 2(j+1)w^{-3} \tilde{B}_{n,j+1}^{(l)} / (1 - w^{-4}), \quad (j = \overline{l-1, 1}).
 \end{aligned}$$

Здесь комбинаций $\tilde{A}_{n,j}^{(l)}$, $\tilde{A}_{n,j}^{(l)}$, $\tilde{E}_{n,j}^{(l)}$, $\tilde{E}_{n,j}^{(l)}$ вычисляются по формулам (3.6). При этом в (3.6) следует заменить \mathcal{S} на w . При вычислении $\tilde{B}_{n,j}^{(l)}$, $\tilde{B}_{n,j}^{(l)}$, $\tilde{F}_{n,j}^{(l)}$, $\tilde{F}_{n,j}^{(l)}$ в (3.6) необходимо заменить \mathcal{S} на w^{-1} .

Эффективность рассматриваемого подхода продемонстрирована в работе [2] на примере краевой задачи для круговой цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием.

Список использованной литературы

1. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. Методы расчета оболочек: В 5-ти т. Т.1 Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Withum D. Die Kreiszyinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung // Ing.-Arch. – 1958. – 26, N6. – S.435 – 446.
3. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. – К.: Наук. Думка, 1970. – 324 с.

Поступила в редколлегию 20.07.2000