

Л.Л. ГАРТ, канд. физ.-мат. наук, Днепропетр. гос. ун-т

## К РАСЧЕТУ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДВУХЗВЕНЬЕВОЙ РУКИ РОБОТА\*

Рассматривается вопрос о применении проекционно-итерационного метода к решению задачи быстрогодействия для нелинейной динамической системы. Метод основан на идее конечно-разностной аппроксимации соответствующей краевой задачи принципа максимума на совокупности измельчающихся сеток и последующем решении сеточных уравнений методом стрельбы с использованием градиентного метода.

**1. Математическая модель.** Рассмотрим модель, описывающую движение в горизонтальном плане сцепленной двухзвеньеовой руки робота [3].

Геометрия руки изображена на рис. 1. Рука состоит из двух расположенного в конце второго звена. Движение руки описывается четырьмя статическими переменными:  $a(t)$  – угол локтя,  $q(t)$  – угловое вращение первого звена,  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  – угловая скорость первого и второго звеньев соответственно.

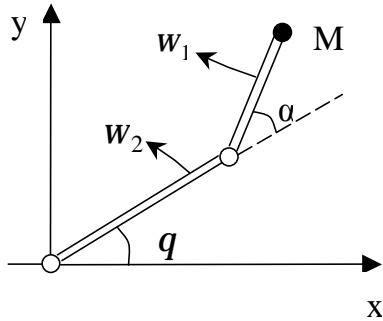


Рис. 1 Геометрия руки

звеньев (с массой  $m_i$  и длиной  $l_i$ ,  $i=1,2$ ) и груза массой  $M$ ,

Управляющими переменными являются в момент времени  $t$  тяга двигателя  $u_1(t)$  для первого звена и  $u_2(t)$  – для второго звена руки.

Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} q' &= w_1, \\ \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \cos a \\ J_{12} \cos a & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_{12} \sin a w_2^2 \\ -J_{12} \sin a w_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ a' &= w_2 - w_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $J_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) обозначают моменты инерции массы:

$J_{11} = J_1 + (m_1 + M)l_1^2$ ,  $J_{12} = m_2 a_2 l_1 + M l_1 l_2$ ,  $J_{22} = J_2 + J_3 + M l_2^2$ ,  $J_1, J_2$  – моменты инерции массы первого и второго звеньев по

отношению к оси плеча и оси локтя соответственно,  $J_3$  – момент инерции массы  $M$  груза по отношению к концу второго звена,  $a_2$  – расстояние между центром тяжести второго звена и локтем.

Переменные контроля являются ограниченными:

$$|u_i(t)| \leq u_{i\max}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

числовые данные имеют следующие значения:

$$m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 1, \quad a_2 = 0.5, \quad J_1 = J_2 = 1/3, \quad J_3 = 0, \quad u_{1\max} = u_{2\max} = 1. \quad (3)$$

С учетом (3) матрица в (1) оказывается неособенной, причем

$$D = J_{11}J_{22} - J_{12}^2 \cos^2 a > 0. \quad (4)$$

Задача состоит в том, чтобы отыскать управляющие функции  $u_1(t), u_2(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , такие, чтобы наконечник руки робота с координатами (см. рис. 1):

$$x(t) = l_1 \cos q + l_2 \cos(q + a), \quad y(t) = l_1 \sin q + l_2 \sin(q + a)$$

передвигался в пределах промежутка длины  $L$  ( $0 \leq L \leq 2(l_1 + l_2)$ )) за минимальное время. Математическая формулировка задачи: минимизировать функционал

$$F(u) = T, \quad (5)$$

$u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ ,  $0 \leq t \leq T$ , при условиях (1), (2) и граничных условиях

$$q(0) = 0, \quad w_1(0) = w_2(0) = 0, \quad (6)$$

$$w_1(T) = w_2(T) = 0, \quad (7)$$

$$r(a(0), a(T), q(T)) = (x(T) - x(0))^2 + (y(T) - y(0))^2 - L^2 = 0. \quad (8)$$

Отметим, что начальное и конечное положения руки робота, определяемые величинами  $a(0)$ ,  $a(T)$ , и  $q(T)$ , в отличие от [2] предварительно не описаны, а значит, также являются управляющими переменными для минимизации времени переноса.

**2. Краевая задача принципа максимума.** Привлекая необходимые условия теории оптимального управления [1], выпишем крайнюю задачу принципа максимума Понтрягина с условиями переключения.

Дифференциальные уравнения (1) в соответствие с равенством (4) могут быть трансформированы в явную систему. Обозначим через  $Y_a, Y_q, Y_{w_1}, Y_{w_2}$  сопряженные переменные по отношению к  $a, q, w_1, w_2$  соответственно. Тогда Гамильтониан и сопряженные дифференциальные уравнения имеют вид

$$H = Y_a (w_2 - w_1) + Y_q w_1 +$$

$$+ \frac{1}{D} [S_1 (J_{12} \sin a w_2^2 + u_1 - u_2) - S_D (J_{12} \sin a w_1^2 - u_2)], \quad (9)$$

$$y'_q = -\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}q} = 0, \quad y'_{w_1} = -\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}w_1} = y_a - y_q + \frac{2J_{12} \sin a}{D} w_1 S_D,$$

$$y'_{w_2} = -\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}w_2} = -y_a - \frac{2J_{12} \sin a}{D} w_2 S_1,$$

$$y'_a = -\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}a} = \frac{J_{12}}{D} \left\{ S_1 (-\cos a w_2^2 + \frac{J_{12} \sin 2a}{D} (J_{12} \sin a w_2^2 + u_1 - u_2)) + \right. \\ \left. + S_D (\cos a w_1^2 - \frac{J_{12} \sin 2a}{D} (J_{12} \sin a w_1^2 - u_2)) \right\} + \quad (10) \\ + \frac{J_{12} \sin a}{D} \left\{ y_{w_1} (J_{12} \sin a w_1^2 - u_2) - y_{w_2} (J_{12} \sin a w_2^2 + u_1 - u_2) \right\},$$

где величина  $D$  определяется из (4),

$$S_1 = J_{22} y_{w_1} - J_{12} \cos a y_{w_2}, \quad S_D = J_{11} y_{w_2} - J_{12} \cos a y_{w_1}. \quad (11)$$

Определим также

$$S_2 = S_D - S_1. \quad (12)$$

Тогда в силу  $D > 0$ ,  $S_1$  и  $S_2$  могут выступать в качестве переключающих функций по отношению к переменным  $u_1$  и  $u_2$ .

Система дифференциальных уравнений (10) вместе с уравнениями (1) образуют основную систему для численного интегрирования. Путем стандартной замены независимой переменной

$$t = T x, \quad \frac{\partial}{\partial x} = T \frac{\partial}{\partial t} \quad (13)$$

эти уравнения трансформируются в систему с независимой переменной  $x$ , изменяющейся на интервале  $0 \leq x \leq 1$ , и дополнительное тривиальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} T = 0. \quad (14)$$

Естественные граничные условия определяются в основном граничным условием (8) и имеют согласно [3] следующий вид

$$y_q(T) \frac{\mathcal{H}r}{\mathcal{H}a(0)} + y_a(0) \frac{\mathcal{H}r}{\mathcal{H}q(T)} = 0, \quad y_q(T) \frac{\mathcal{H}r}{\mathcal{H}a(T)} - y_a(T) \frac{\mathcal{H}r}{\mathcal{H}q(T)} = 0. \quad (15)$$

Еще одно естественное граничное условие получается в соответствии со свободным финальным временем:  $H|_{t=T} = -\frac{\mathcal{H}F}{\mathcal{H}T} = -1$ , или с учетом граничных условий (6) и (7)

$$[S_1 u_1 + S_2 u_2 + D]_{t=T} = 0. \quad (16)$$

Вместе с условиями (15)–(16) краевая задача принципа максимума является формально полной: имеются девять дифференциальных уравнений первого порядка (1), (10), (14) и соответствующие им двухточечные граничные условия (6)–(8), (15), (16).

Выражения для управляющих переменных имеют вид [3]:

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i_{\max}}, & S_i(t) < 0, \\ -u_{i_{\max}}, & S_i(t) > 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Точки переключения  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) являются параметрами краевой задачи, которые определяются условиями переключения

$$S_i(t_k) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

**3. Приближенное решение краевой задачи принципа максимума.** Введем вектор-функцию  $z = (q, w_1, w_2, a, y_q, y_{w_2}, y_{w_2}, y_a, T)$ . Тогда краевая задача (1), (10), (14), (6), (7), (8), (15), (16) с условиями переключения (18) запишется в виде

$$z'(t) = g(t, z, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

$$u(t) = u_k(t, z), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad (20)$$

$$R_k(z(0), z(1)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

$$B_k(t_k, z(t_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (22)$$

Здесь  $n$ -мерная ( $n = 9$ ) вектор-функция  $z(t)$  предполагается достаточно гладкой в подинтервалах  $[t_k, t_{k+1}]$  и имеет односторонние пределы по  $t_k$  и  $t_{k+1}$ . Точки переключения  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , являются параметрами задачи и удовлетворяют условию:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = 1.$$

Для приближенного решения краевой задачи (19)–(22) будем применять метод стрельб [1]. Условия (6), (7) однозначно определяют значения первых  $m = 3$  компонент вектора  $z(0)$ . Зададим каким-либо образом остальные  $s = n - m$  компонент:  $z_{m+i}(0) = I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Тем самым каждому набору параметров  $I = (I_1, I_2, \dots, I_s)$  соответствует вектор  $z(0) = z_0(I) = (0, 0, 0, I_1, \dots, I_s)$ . Решая задачу Коши для системы (19) с начальным условием

$$z(0) = z_0(I) \quad (23)$$

на сетке  $v_h = \{t_j \in [0, 1]: t_j = jh, j = \overline{0, N}; h = 1/N\}$  методом Эйлера, получим сеточную вектор-функцию  $z(t_j, I)$ ,  $t_j \in v_h$ , которая при любом выборе  $I$  удовлетворяет граничным условиям (6), (7) (или, что то же самое, условиям (21) при  $k = 1, \dots, m$ ). Для удовлетворения оставшимся граничным условиям (21)  $I$  следует выбрать из следующей трансцендентной системы уравнений:

$$j_i(I) = j_i(I_1, \dots, I_s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (24)$$

где  $j_i(I) \equiv R_{m+i}(z_0(I), z(1, I))$ . Система (24), в частности, может быть сведена к эквивалентной задаче минимизации функции

$$j(I) = \sum_{i=1}^s j_i^2(I) \quad (25)$$

конечного числа переменных  $(I_1, \dots, I_s) = I$ . Тем самым краевая задача принципа максимума оказывается сведенной к задаче отыскания минимума функции (25) на всем пространстве  $E^s$ .

Задачу минимизации  $j(I)$  на  $E^s$  будем решать градиентным методом, согласно которому итерационная последовательность приближений строится по формулам

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} - a^{(k)} j'(I^{(k)}), \quad a^{(k)} = \text{const} > 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Для  $j(I)$  заранее известна величина  $j^* = \inf_{I \in E^s} j(I) = 0$ , поэтому в равенстве (26) можно принять [1]

$$a^{(k)} = (j(I^{(k)}) - j^*) / \|j'(I^{(k)})\|^{-2}.$$

Здесь  $j'(I)$  – градиент  $j(I)$  в точке  $I = (I_1, \dots, I_s)$ . Частные производные функций  $j_i(I)$ , необходимые при вычислении градиента, заменяются их конечно-разностными отношениями. Итерации (26) естественно продолжать до тех пор, пока не выполнится условие

$$\|j'(I^{(k)})\| < \epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (27)$$

Рассмотрим проекционно-итерационную модификацию метода стрельб для решения задачи (19)-(22). Введем на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  совокупность “вложенных” вдвое сеток

$$\mathcal{V}_{h_n} = \{t_j \in [0, 1]: t_j = jh_n, \quad j = \overline{0, N_n}; \quad h_n = 1/N_n\}, \quad (28)$$

$$N_1 > 0, \quad N_{n+1} = 2N_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

на каждой из которых, начиная с самой грубой, будем последовательно реализовывать схему метода стрельб, описанную выше. При этом начальное значение  $I_1^{(0)} = (I_{11}^{(0)}, \dots, I_{1s}^{(0)})$  для набора параметров  $I = (I_1, \dots, I_s)$ , доопределяющего неизвестные компоненты вектора  $z(0)$ , зададим лишь для первой из решаемых приближенных задач на сетке  $\mathcal{V}_{h_1}$ . Для каждой из последующих приближенных задач, рассматриваемых на сетках  $\mathcal{V}_{h_{n+1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), в качестве  $I_{n+1}^{(0)}$  примем последнее из приближений  $I_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_n$ , построенных методом (26) на предыдущем шаге. Количество итераций  $k_n$ , выполняемых для каждой приближенной задачи, определим как наименьшее целое  $k$ , удовлетворяющее условию (27), в котором  $\epsilon$  положим величиной по-

рядка разностной аппроксимации задачи (19)-(22) на сетке  $V_{h_n}$ :  $e = e_n = Ch_n$ ,  $C = const > 0$ . Проекционно-итерационный процесс будем считать оконченным на шаге с номером  $n = p$ , если величина  $e = e_p$  в условии (27) отвечает требованиям необходимой точности.

**4. Численный эксперимент.** Численный расчет оптимального по времени перемещения двухзвеньевого руки робота выполнялся для набора данных (3) и значения параметра  $L=1$ . Совокупность сеток (28) в проекционно-итерационном методе определялась величиной первоначального разбиения  $N_1 = 3$  и для получения приближенного решения с точностью  $e = 0,001$  оказалась состоящей из  $p = 7$  сеток с размерностью последней  $N_p = 192$ . Начальное значение для  $I$  на первой сетке было принято следующим:  $I_1^{(0)} = (0,0,0,0,0,1)$ . Расчеты проводились на вычислительном центре Гамбургского университета (Германия) [4]. В ходе реализации проекционно-итерационного метода для задачи (19)-(22) на сетках  $V_{h_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, p$ , было выполнено в

общей сложности  $\sum_{n=1}^p k_n = 0 + 2 + 4 + 6 + 5 + 1 + 10 = 28$  итераций. Время счета при этом составило  $t = 1 \text{ мин.} 37 \text{ сек.}$  Для минимизируемого функционала (5) и точек переключения были получены следующие значения:  $T = 1,4837$ ,  $t_1 = 0,3333 \cdot T$ ,  $t_2 = 0,5521 \cdot T$ .

Наряду с проекционно-итерационным методом к решению задачи (19)-(22) применялся обычный метод стрельб на одной сетке  $V_h$  с  $N=192$ . При том же начальном значении  $I_1^{(0)} = (0,0,0,0,0,1)$  приближенное решение задачи было получено с точностью  $e = 0,001$  за 62 итерации, что потребовало  $7 \text{ мин.} 35 \text{ сек.}$  машинного времени. Минимальное значение функционала (5) составило  $T = 1,4908$ , точки переключения  $t_1 = 0,3281 \cdot T$ ,  $t_2 = 0,5573 \cdot T$

Сравнение результатов обоих методов показывают целесообразность проекционно-итерационного подхода с точки зрения уменьшения вычислительных затрат на построение приближений, а также точности получаемых приближенных решений.

#### Список использованной литературы

1. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 374 с.
2. Geering H.P., Guzzella L., Hepner S.A.R., Onder C.H. Time-optimal Motions of Robots in Assembly Tasks // IEEE Transactions on Automatic Control. – Vol. AC-31, № 6. – 1986. – Pp. 512–518.

3. Oberle H.J. Numerical Computation of Singular Control Function for a Two-Link Robot Arm // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 95: Optimal control. – 1987. – Pp. 244–253.
4. Hart L.L. The Application of Projection-Iteration Methods to Solving Optimal Control Problems for Systems of Ordinary Differential Equations // Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik. – Hamburg: Universitat Hamburg, 2000. – Preprint № 152. – 17 s.

Поступила в редколлегию 17.07.2000