УДК 539.3

В.А. ГЕРАСИК, м.н.с., Таврический нац. ун–т

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ОТ ГЛУБИННОГО ИСТОЧНИКА ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается нестационарная задача о распространении волн на поверхности упругого полупространства от глубинного источника расширения (модель взрыва в полупространстве). Получены точные решения в виде интегралов с конечными пределами, проведен численный расчет общего решения. Получены алгебраические выражения для волны Рэлея. Исследуется переходной процесс для волны Рэлея на поверхности полупространства. Приводятся расчеты волны Рэлея от разрывных импульсных источников.

Точечный источник продольных волн на глубине h в цилиндрической системе координат можно представить в виде действия обобщенной силы:

$$F(r,z,t) = P \cdot N(t)\frac{d(r)}{2pr}d(z-h)\,, \qquad (1)$$

при этом потенциал смешений для падающей волны удовлетворяет волновому уравнению:

$$\ddot{f} = a^2\nabla^2 f + \frac{F}{r}\,, \qquad (2)$$

где a – скорость продольных волн.

Применяя интегральное преобразование Бесселя–Лапласа в виде:

$$\int_0^\infty r\,\mathrm{I}_0(lr)dr\int_0^\infty e^{-st}dt \text{ (прямое)}$$

$$\frac{1}{pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty} l\,\mathrm{K}_0(lr)dl\;\frac{1}{2pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}ds \text{ (обратное)},$$

(I_0-модифицированная функция Бесселя, K_0 - функция Макдональда) можно получить изображение решения для падающей волны (здесь и далее функции и трансформанты обозначаются одной и той же буквой, а различаются в зависимости от аргументов):

$$f^{пад}(l,z,s) = \frac{P \cdot N(s)}{4pra^2 sx}e^{-sx|z-h|}, \qquad x = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{l^2}{s^2}}\,. \qquad (3)$$

Переход к комплексному лучевому параметру p осуществляется заменой $l = sp$ (l рассматривается как формальная переменная интегрирования, s – формальный параметр), тогда преобразование Лапласа (3) примет вид:

$$f^{\,пад}(r,z,s)=\frac{sN(s)}{4pra^2}\frac{P}{pi}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{p}{x}K_0(spr)e^{-sx|z-h|}dp\,. \qquad (4)$$

Известно, что источник вида (1) генерирует отраженные продольную и поперечную волны, поэтому преобразование Лапласа решения для суммарных потенциалов имеет вид:

$$f(r,z,s)=f^{\,пад}+f^{\,PP}=$$

$$=\frac{P}{4pra^2}\frac{sN(s)}{pi}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{p}{x}(e^{-sx|z-h|}+PPe^{-sx|z+h|})K_0(spr)dp$$

$$y\;(r,z,s)=y^{\;PS}=\frac{P}{4pra^2}\frac{sN(s)}{pi}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{p}{x}PSe^{-s(xh+hz)}K_0(spr)dp\,, \qquad (5)$$

где y – потенциал поперечных упругих волн, удовлетворяющий волновому уравнению

$$\ddot{y}=b^2\nabla^2 y\;, \qquad h=\sqrt{\frac{1}{b^2}-p^2}\,, \qquad (6)$$

b – скорость распространения поперечных волн, PP и PS – коэффициенты отражения.

Выражения для смещений и напряжений имеют вид:

$$u_r=\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 y}{\partial r\partial z}=$$

$$=-A\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{p^2}{x}(e^{-sx|z-h|}+PPe^{-sx|z+h|}-shPSe^{-s(xh+hz)})K_1(spr)dp,$$

$$u_z=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y}{\partial r})= \qquad (7)$$

$$=-A\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{p}{x}(x\cdot sign(z-h)e^{-sx|z-h|}+xPPe^{-sx|z+h|}+sp^2PSe^{-s(xh+hz)})K_0(spr)dp,$$

где $A=\dfrac{P}{4pra^2}\dfrac{s^2N(s)}{pi}$.

Условия на свободной поверхности $s_{rz}=0$ и $s_{zz}=0$ определяют коэффициенты отражения PP и PS:

$$PP=\frac{4p^2xh-(\frac{1}{b^2}-2p^2)^2}{R(p)}\,, \qquad (-sp)PS=\frac{4px(\frac{1}{b^2}-2p^2)}{R(p)}\,, \qquad (8)$$

где $R(p)=(\frac{1}{b^2}-2p^2)^2+4p^2xh$ – соотношение Рэлея.

Преобразования Лапласа смещений на поверхности $z=0$ имеют вид:

$$u_r = -\frac{P}{pma^2}\frac{s^2N(s)}{pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty} p^2\frac{h}{R(p)}e^{-sxh}K_1(spr)dp,$$

$$u_z = \frac{P}{2pma^2}\frac{s^2N(s)}{pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty} p\frac{1/b^2-2p^2}{R(p)}e^{-sxh}K_0(spr)dp. \qquad (9)$$

Полагая $N(t)=tH(t)$ ($H(t)$ – функция Хевисайда), т.е. $s^2N(s)=1$ и используя свойства функции Макдональда: $K_0(\bar{x})=\overline{K_0(x)}$ и $K_1(\bar{x})=\overline{K_1(x)}$, а также четность величин x, h, R относительно чисто мнимых p, можно переписать (9) в виде:

$$u_r = -\frac{2P}{p^2ma^2}\operatorname{Im}\int_0^{+i\infty} p^2\frac{h}{R(p)}e^{-sxh}K_1(spr)dp,$$

$$u_z = \frac{P}{p^2ma^2}\operatorname{Im}\int_0^{+i\infty} p\frac{1/b^2-2p^2}{R(p)}e^{-sxh}K_0(spr)dp. \qquad (10)$$

Обратное преобразование Лапласа осуществляется применением табличных интегралов:

$$\mathrm{K}_1(sa)e^{-sb} = \mathrm{Laplas}\left[\frac{t-b}{a}\frac{\mathrm{H}(t-a-b)}{\sqrt{(t-b)^2-a^2}}\right],$$

$$\mathrm{K}_0(sa)e^{-sb} = \mathrm{Laplas}\left[\frac{\mathrm{H}(t-a-b)}{\sqrt{(t-b)^2-a^2}}\right],$$

$$u_r = -\frac{2Pg^2}{p^2mb\bar{r}h}\operatorname{Im}\int_0^{+i\infty}\bar{p}\frac{(\bar{t}-\bar{x})\bar{h}}{\bar{R}(\bar{p})}\frac{H(\bar{t}-\bar{p}\bar{r}-\bar{x})}{\sqrt{(\bar{t}-\bar{x})^2-\bar{p}^2\bar{r}^2}}d\bar{p},$$

$$u_z = \frac{Pg^2}{p^2mbh}\operatorname{Im}\int_0^{+i\infty}\bar{p}\frac{1-2\bar{p}^2}{\bar{R}(\bar{p})}\frac{H(\bar{t}-\bar{p}\bar{r}-\bar{x})}{\sqrt{(\bar{t}-\bar{x})^2-\bar{p}^2\bar{r}^2}}d\bar{p}. \qquad (11)$$

Здесь и далее (кроме (16), (17)) используются безразмерные величины (черточки над ними опускаются):

$g=\dfrac{b}{a}$, $\quad \bar{p}=bp$, $\quad \bar{r}=\dfrac{r}{h}$, $\quad \bar{t}=\dfrac{bt}{h}$, $\quad \bar{x}=\sqrt{g^2-\bar{p}^2}$, $\quad \bar{h}=\sqrt{1-\bar{p}^2}$,

$\bar{R}(\bar{p})=(1-2\bar{p}^2)^2+4\bar{p}^2\bar{x}\bar{h}$.

Метод Каньяра [1] позволяет представить интегралы (11) в виде интегралов с конечными пределами, для этого следует сделать замену $t=pr+x$ (t – действительный параметр), и провести интегрирование по соответствующему контуру (действительный полюс Рэлея будет лежать вне этого контура):

$$u_r = -\frac{2Pg^2}{p^2 mbrh}\,\mathrm{Im}\int_g^{\infty} p\,\frac{(t-x)h}{R(p)}\,\frac{H(t-t)}{\sqrt{(t-t)\cdot(t-t+2pr)}}\,\frac{dp}{dt}dt\,,$$

$$u_z = \frac{Pg^2}{p^2 mbh}\,\mathrm{Im}\int_g^{\infty} p\,\frac{1-2p^2}{R(p)}\,\frac{H(t-t)}{\sqrt{(t-t)\cdot(t-t+2pr)}}\,\frac{dp}{dt}dt\,, \qquad (12)$$

где $\quad p = \dfrac{rt + i\sqrt{t^2 - g^2(r^2+1)}}{r^2+1}, \quad \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{ix}{\sqrt{t^2 - g^2(r^2+1)}}.$

Из (12) видно, что ступенчатая функция ограничивает бесконечный предел интегрирования, также можно показать, что отрезок $g < t < g\sqrt{r^2+1}$ не дает вклад в интегралы (12). Как в случае u_r, так и в случае u_z подынтегральные выражения приобретают ненулевую мнимую часть только при $t > g\sqrt{r^2+1}$. Поэтому окончательные выражения для смещений имеют вид:

$$u_r(r,t) = D\cdot F_r(r,t), \qquad u_z(r,t) = D\cdot F_z(r,t),$$

где

$$D = \frac{Pg^2}{p^2 mbh}, \quad F_r(r,t) = -\frac{2}{r}\,\mathrm{Im}\int_{g\sqrt{r^2+1}}^{t} \frac{p}{R(p)}\,\frac{(t-x)h}{\sqrt{(t-t)\cdot(t-t+2pr)}}\,\frac{dp}{dt}dt\,,$$

$$F_z(r,t) = \mathrm{Im}\int_{g\sqrt{r^2+1}}^{t} \frac{p}{R(p)}\,\frac{1-2p^2}{\sqrt{(t-t)\cdot(t-t+2pr)}}\,\frac{dp}{dt}dt\,. \qquad (13)$$

Интегралы имеют интегрируемые особенности на обоих концах интегрирования т.е. при $t = t$ и $t = g\sqrt{r^2+1}$. Следует отметить, что при получении (13) не было сделано никаких приближений. Численные расчеты $F_r(r,t)$, $F_z(r,t)$ представлены на рис. 1,2.

Компоненты смещений в волне Рэлея можно вычислить непосредственно как вычеты подынтегральных выражений (11) в полюсе Рэлея $p_R = \dfrac{b}{c_R}$, где c_R – скорость волны Рэлея:

$$u_r^R(r,t) = D\cdot F_r^R(r,t) = \frac{2pD}{r}\cdot \mathrm{Re}\left[\frac{p_R}{R'(p_R)}\,\frac{h(p_R)(t-x(p_R))}{\sqrt{(t-x(p_R))^2 - p_R^2 r^2)}}\right],$$

$$u_z^R(r,t) = D\cdot F_z^R(r,t) = pD\cdot \mathrm{Re}\left[\frac{p_R}{R'(p_R)}\,\frac{1-2p_R^2}{\sqrt{(t-x(p_R))^2 - p_R^2 r^2}}\right], \qquad (14)$$

На рис.1,2 видно, что вклад волны Рэлея преобладает в общем решении даже при относительно небольшом отношении эпицентрального расстояния к глубине источника.

Очевидно, что следует идентифицировать фронт Рэлея с макси-

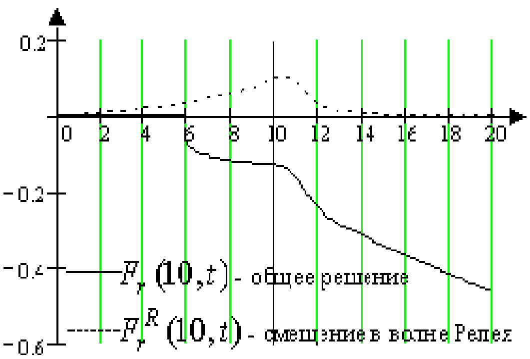

Рис. 1 Радиальные смещения

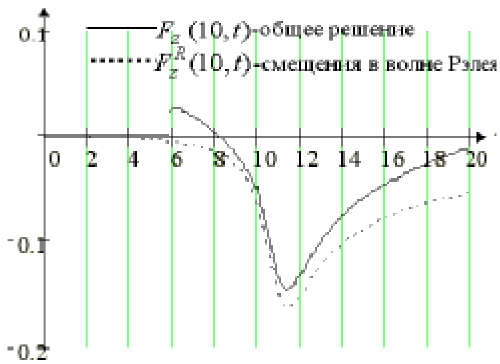

Рис. 2 Вертикальные смещения

мумами на теоретических сейсмограммах (рис.1,2). Если поместить приемник над источником ($r=0$), то нетрудно показать, что максимум функции $u_z^R(0,t)$ достигается в точке

$$t_R = ix(p_R) = \sqrt{p_R^2 - g^2}, \tag{15}$$

а если перейти к размерным переменным, то это соотношение примет вид:

$$t_R = h\frac{\sqrt{a^2 - c_R^2}}{ac_R}, \tag{16}$$

что можно интерпретировать как время выхода фронта вертикальной волны Рэлея на поверхность. Более того, можно рассчитать расстояние, которое пройдет Р – волна по поверхности до момента выхода волны Рэлея:

$$r = at_R = h\frac{\sqrt{a^2 - c_R^2}}{c_R}. \tag{17}$$

В силу линейности задачи, для волн Рэлея дифференцированием по времени выражений (14) можно получить решения для временных зависимостей $H(t)$ и $d(t)$. При этом, как показано на рис. 3,4, формы колебаний в волне Рэлея от этих источников, в отличие от источника с временной зависимостью $tH(t)$ (рис.1,2) характеризуются уже двумя сильно выраженными экстремумами.

Вертикальную компоненту смещений (14) можно представить в виде волнового пакета:

$$u_z = A(r,t)\cos q(r,t), \tag{18}$$

где $\quad A(r,t)=\dfrac{pC\cdot D}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}, \qquad q=\dfrac{1}{2}arctg(\dfrac{y}{x}), \qquad C=p_R\,\dfrac{2p_R^2-1}{R'(p_R)},$

$$x=t^2-s^2-p_R^2r^2, \qquad y=-2st, \qquad s=\sqrt{p_R^2-g^2}\,.$$

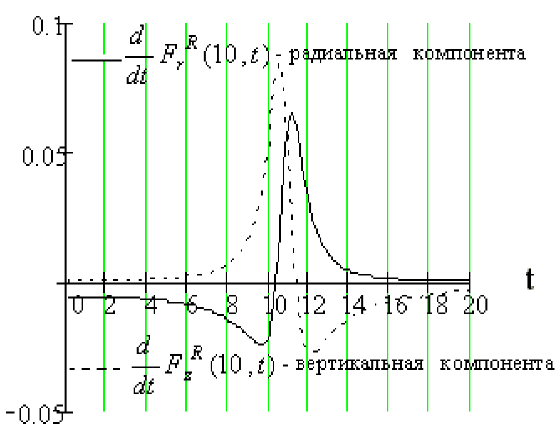

Рис. 3 Смещения в волне Релея от источника с временной зависимостью H(t)

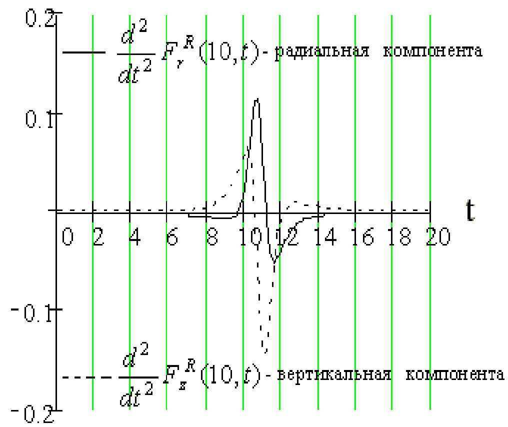

Рис. 4 Смещения в волне Релея от источника с временной зависимостью $\delta(t)$

Движение с постоянной фазой $q(r,t)=q_0$ имеет траекторию вида:

$$r(t)=c_R\sqrt{t^2-2s\cdot ctg2q_0\cdot t-s^2}=c_R\sqrt{(t-t_1)(t-t_2)}\,, \tag{19}$$

при этом положительный корень $t=t_{q_0}$ можно интерпретировать как время выхода фазы величины q_0 на поверхность, а именно:

$$t_{q_0}>s\,\frac{\cos 2q_0+sign(\sin 2q_0)}{\sin 2q_0}>0\,. \tag{20}$$

Дифференцированием (19) можно получить выражение для фазовой скорости вертикальной компоненты волны Рэлея:

$$C_\Phi=c_R\,\frac{t-2s\cdot ctg2q_0}{\sqrt{t^2-2s\cdot ctg2q_0\cdot t-s^2}}\,. \tag{21}$$

Отсюда видно, что фазовая скорость при $t\to\infty$ будет равна скорости распространения волн Рэлея c_R, а при $h=0$ (источник на поверхности) $C_\Phi=c_R$ и, следовательно, дисперсия отсутствует.

Пользуясь обобщенными понятиями частоты и волнового числа [2] можно получить дисперсионное соотношение для этого колебания в виде (W, K соответственно частота и волновое число):

$$W(K) = K \cdot c_R^2 \frac{t^2 + s^2 + r^2 / c_R^2}{2rt} \; . \qquad (22)$$

Из (21) также видно, что при $h = 0$ на фронте Рэлея $r = c_R t$ фазовая скорость будет постоянной и $W(K) = K \cdot c_R$.

Легко видеть, что максимальное значение фазы $q = p / 4$ достигается при $x = 0$, т.е. при $r = c_R \sqrt{t^2 - s^2}$, а максимум амплитуды – при $r = c_R \sqrt{t^2 + s^2}$, это означает, что максимум смещений на больших временах соответствует фронту Рэлея $r = c_R t$.

Численные расчеты для временных зависимостей $H(t)$ и $d(t)$ показывают два хорошо различимых экстремума смещений, а так как именно эти функции являются передаточными при построении решений с другими временными зависимостями можно сделать вывод о том, что смещения в волне Рэлея от глубинного источника может характеризоваться четко выраженными максимумом и минимумом смещений. Изучение этих точек могло бы дать дополнительную информацию при решении обратных задач.

Список использованной литературы

1. Аки К., Ричардс П., Количественная сейсмология: Теория и методы – М.: Мир, –1983.–520 с.
2. Уизем Дж. Дж., Линейные и нелинейные волны – М.: Мир, 1977, – 622 с.
3. Новацкий В., Теория упругости – М.: Мир, 1975, – 872 с.

Поступила в редколлегию 15.07.2000