

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, Ю. А. ГЛУЩЕНКО, асп.,  
Донецкий гос. ун-т

## ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

В работе [1] предложен метод решения плоской задачи электроупругости с применением обобщенных комплексных потенциалов. В статье [2] исследованы общие представления комплексных потенциалов для многосвязной области, приведена методика вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) и индукции. В данной статье получены общие выражения комплексных потенциалов для многосвязной полуплоскости с отверстиями и прямолинейными трещинами при любом их расположении и сочетании, исследовано электроупругое состояние полуплоскости с одним эллиптическим отверстием или прямолинейной трещиной.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим нижнюю полуплоскость  $S^-$  с прямолинейной границей  $L_0$ , ослабленную отверстиями с контурами  $L_l^-$  ( $l = \overline{1, L}$ ) и находящуюся в условиях обобщенного плоского электроупругого состояния. Будем считать, что на контурах отверстий  $L_l^-$  заданы внешние воздействия в виде распределенных усилий или зарядов или и тех, и других; во внутренних точках  $z_i^0$  ( $i = \overline{1, I}$ ) области  $S^-$  действуют сосредоточенные силы или заряды. На конечной части прямолинейной границы  $L_0$ , обозначаемой  $L''$ , заданы внешние воздействия, на остальной части  $L_0$  усилия и индукция отсутствуют ( $s_y = t_{xy} = D_y = 0$ ). На бесконечности вращение отсутствует (угол поворота  $w_3^\infty = 0$ ) и задано однородное напряженное состояние, причем в силу незагруженности на бесконечности границы полуплоскости  $s_y^\infty = t_{xy}^\infty = D_y^\infty = 0$ .

**§ 2. Основные соотношения для комплексных потенциалов.** Определение электроупругого состояния рассматриваемой полуплоскости сводится к нахождению производных комплексных потенциалов  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) из граничных условий на  $L_0$  и  $L_l^-$  [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 d_k \Phi_k'(z_k) = f_{il}(t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

где

$$d_k = \cos(ny) - m_k \cos(nx); \quad (2.2)$$

$$g_{k1}^0 = I_{6k}, \quad g_{k2}^0 = I_{2k}, \quad g_{k3}^0 = I_{4k},$$

$$f_{1l}(t) = X_{nl}, \quad f_{2l}(t) = Y_{nl}, \quad f_{3l}(t) = D_{nl} \quad (2.3)$$

в случае первой основной задачи

$$g_{k1}^0 = p_k, \quad g_{k2}^0 = q_k, \quad g_{k3}^0 = I_{8k},$$

$$f_{1l}(t) = \frac{du_l^*}{ds} \pm w_{3l} \cos nx, \quad f_{2l}(t) = \frac{dv_l^*}{ds} m w_{3l} \cos ny, \quad f_{3l}(t) = D_{nl} \quad (2.4)$$

для второй основной задачи;  $m_k$  – корни известного характеристического уравнения [1 – 3];  $n$  – внешняя нормаль;  $I_{ik}$ ,  $p_k$ ,  $q_k$  – постоянные, зависящие от материала полупространства;  $X_{nl}$ ,  $Y_{nl}$  и  $D_{nl}$  – компоненты соответственно внешних усилий и электростатической индукции на контуре  $L_l^-$ ;  $u^*$ ,  $v^*$  – заданные значения перемещений;  $w_{3l}$  – поворот контура  $L_l^-$  как целого.

После определения производных комплексных потенциалов характеристики электроупругого состояния вычисляются по формулам [1 – 3]

$$(s_x, s_y, t_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (I_{1k}, I_{2k}, I_{6k}) \Phi'_k(z_k); \quad (2.5)$$

$$(u, v, j) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-w_3 y + u_0, w_3 x + v_0, j_0); \quad (2.6)$$

$$(D_x, D_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (I_{7k}, I_{8k}) \Phi'_k(z_k); \quad (2.7)$$

$$(E_x, E_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (r_k^0, m_k r_k^0) \Phi'_k(z_k), \quad (2.8)$$

где  $r_k^0$  – постоянные, зависящие от материала полупространства;  $-w_3 y + u_0$ ,  $w_3 x + v_0$  – жесткие перемещения полуплоскости как целого;  $j_0$  – нулевой уровень потенциала электростатического поля.

Функции  $\Phi_k(z_k)$  определены в нижних полуплоскостях  $S_k^-$ , получаемых из заданной области  $S^-$  аффинными преобразованиями  $z_k = x + m_k y$ . Области  $S_k^-$  так же, как и  $S^-$ , являются многосвязными нижними полуплоскостями, ограниченными контурами  $L_{kl}^-$ , соответствующими  $L_l^-$  при указанных аффинных преобразованиях. В общем

случае бесконечной многосвязной полуплоскости производные комплексных потенциалов имеют вид

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) + \Phi'_{k0}(z_k) + \Phi'_{k1}(z_k). \quad (2.9)$$

Здесь [3, 4]  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из системы

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (I_{1k}, I_{2k}, I_{6k}, I_{7k}, I_{8k}, q_k - m_k p_k) \Gamma_k = (s_x^\infty, 0, 0, D_x^\infty, 0, 0); \quad (2.10)$$

$$A'_k(z_k) = \sum_{l=1}^L \frac{A_{kl}}{z_k - z_{kl}} + \sum_{i=1}^I \frac{A_{ki}^0}{z_k - z_{ki}^0}; \quad (2.11)$$

$A_{kl}$  – коэффициенты, удовлетворяющие системе

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (I_{6k}, I_{2k}, I_{8k}, p_k, q_k, r_k^0) i A_{kl} = \left( \frac{X_l}{2p}, \frac{Y_l}{2p}, \frac{Q_l}{2p}, 0, 0, 0 \right); \quad (2.12)$$

$X_l, Y_l$  и  $Q_l$  – соответственно компоненты главного вектора внешних усилий и суммарный заряд на контуре  $L_l^-$ ;  $z_{kl}$  – точки внутри  $L_{kl}^-$ , соответствующие при аффинных преобразованиях произвольным точкам  $z_l$  внутри  $L_l^-$ ;  $A_{ki}^0$  – коэффициенты, удовлетворяющие системе, получаемой из (2.12) заменой  $A_{kl}, X_l, Y_l, Q_l$  на  $A_{ki}^0, X_i^0, Y_i^0, Q_i^0$  соответственно;  $X_i^0, Y_i^0$  и  $Q_i^0$  – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенного заряда в точке  $z_i^0$  ( $i = \overline{1, I}$ );  $\Phi'_{k0}(z_k)$  и  $\Phi'_{k1}(z_k)$  – функции, голоморфные соответственно в нижних полуплоскостях и вне отверстий  $L_{kl}^-$ , включая точки  $z_{ki}^0$ , соответствующие  $z_i^0$ .

Учитывая, что на  $L_0$  имеют место равенства  $z_k = x$ ;  $d_k = 1$ , и выражая из (2.1) функции  $\Phi'_k(z_k)$  через сопряженные, получаем

$$\Phi'_k(z_k) = -\bar{r}_k \overline{\Phi'_k(z_k)} - \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(z_{k+1})} - \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi'_{k+2}(z_{k+2})} + h_k(z_k), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= [\bar{I}_{6k} (I_{2,k+1} I_{8,k+2} - I_{2,k+2} I_{8,k+1}) + \bar{I}_{2k} (I_{8,k+1} I_{6,k+2} - \\ &\quad - I_{8,k+2} I_{6,k+1}) + \bar{I}_{8k} (I_{6,k+1} I_{2,k+2} - I_{6,k+2} I_{2,k+1})] / \bar{n}_k, \\ \bar{s}_{k+1} &= [\bar{I}_{6,k+1} (I_{2,k+1} I_{8,k+2} - I_{2,k+2} I_{8,k+1}) + \bar{I}_{2,k+1} (I_{8,k+1} I_{6,k+2} - \\ &\quad - I_{8,k+2} I_{6,k+1}) + \bar{I}_{8,k+1} (I_{6,k+1} I_{2,k+2} - I_{6,k+2} I_{2,k+1})] / \bar{n}_k, \\ \bar{e}_{k+2} &= [\bar{I}_{6,k+2} (I_{2,k+1} I_{8,k+2} - I_{2,k+2} I_{8,k+1}) + \bar{I}_{2,k+2} (I_{8,k+1} I_{6,k+2} - \\ &\quad - I_{8,k+2} I_{6,k+1}) + \bar{I}_{8,k+2} (I_{6,k+1} I_{2,k+2} - I_{6,k+2} I_{2,k+1})] / \bar{n}_k, \\ h_k &= -[X_{n0} (I_{2,k+1} I_{8,k+2} - I_{2,k+2} I_{8,k+1}) + Y_{n0} (I_{8,k+1} I_{6,k+2} - \\ &\quad - I_{8,k+2} I_{6,k+1}) + D_{n0} (I_{6,k+1} I_{2,k+2} - I_{6,k+2} I_{2,k+1})] / \bar{n}_k, \\ \bar{n}_k &= I_{6k} (I_{2,k+1} I_{8,k+2} - I_{2,k+2} I_{8,k+1}) + I_{2k} (I_{8,k+1} I_{6,k+2} - \end{aligned}$$

$$-I_{8,k+2}I_{6,k+1}) + I_{8k}(I_{6,k+1}I_{2,k+2} - I_{6,k+2}I_{2,k+1}); \quad (2.14)$$

$k$  – индекс, принимающий значения 1, 2, 3, причем значение индекса  $k + j$ , когда он больше 3, формально полагается равным  $j$ .

Подставляя выражения (2.9) в граничные условия (2.13) и используя метод интегралов типа Коши, найдем выражение для  $\Phi'_{k0}(z_k)$ . Учитывая это выражение, окончательно найдем общие представления потенциалов (2.9):

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) - \bar{r}_k \bar{A}'_k(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{A}'_{k+1}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{A}'_{k+2}(z_k) + f_{k0}(z_k) + \Phi'_{k1}(z_k) - \bar{r}_k \bar{\Phi}'_{k1}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}'_{k+1,1}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}'_{k+2,1}(z_k). \quad (2.16)$$

где

$$f_{k0}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_k} \frac{h_k(t) dt}{t - z_k}.$$

**§ 3. Общее решение задачи электроупругости для полуплоскости с отверстиями и прямолинейными трещинами.** Пусть контуры  $L_l^-$  являются эллипсами с полуосями  $a_l, b_l$  (рис.1). Тогда и  $L_{kl}^-$  будут эллиптическими. Эллипсы  $L_l^-$  могут касаться, пересекаться, вырождаться в прямолинейные разрезы, их дуги могут образовывать части контуров отверстий произвольной формы. Отнесем эллипс  $L_l^-$  к локальной системе координат  $O_l x_l y_l$ , начало которой совместим с центром эллипса и ось  $O_l x_l$  направим по полуоси  $a_l$ . В этой системе параметрическое уравнение эллипса  $L_l^-$  записывается так:

$$x_l = a_l \cos q, \quad y_l = b_l \cos q, \quad 0 \leq q \leq 2\pi, \quad (3.1)$$

а в системе  $Oxy$  имеет вид:

$$x = x_{0l} + x_l \cos j_l - y_l \sin j_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin j_l + y_l \cos j_l, \quad (3.2)$$

где  $x_{0l}, y_{0l}$  – координаты центра  $L_l^-$  в системе  $Oxy$ ;  $j_l$  – угол между положительными направлениями  $Ox$  и  $O_l x_l$ . Тогда функции  $\Phi'_{kl}(z_k)$ , голоморфные вне отверстий  $L_{kl}^-$ , можно представить в виде следующих рядов Лорана:

$$\Phi'_{kl}(z_k) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} j_{kln}(z_k), \quad (l = \overline{1, L}). \quad (3.3)$$

Здесь

$$j_{kln}(z_k) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z_{kl}^{n-1} R_{kl} (z_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (3.4)$$

$z_{kl}(z_k)$  – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} \left( z_{kl} + \frac{m_{kl}}{z_{kl}} \right); \quad (3.5)$$

$$z_{0kl} = x_{0l} + m_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos j_l + m_k \sin j_l) + ib_l (\sin j_l - m_k \cos j_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos j_l + m_k \sin j_l) - ib_l (\sin j_l - m_k \cos j_l)}{2R_{kl}}; \quad (3.6)$$

$a_{kln}$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий на контурах отверстий.

На основании (3.3), (3.4) для комплексных потенциалов будем иметь

$$\Phi'_k(z_k) = j_k(z_k) + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_{kln} j_{kln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{j}_{kln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,ln} \bar{j}_{k+1,ln}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,ln} \bar{j}_{k+2,ln}(z_k) \}, \quad (3.7)$$

где

$$j_k(z_k) = \Gamma_k + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{h_k(t) dt}{t - z_k} - \bar{r}_k \bar{A}_k(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2}(z_k);$$

(3.8)

$$\bar{j}_{k+i,ln}(z_k) = -\frac{n}{\bar{z}_{k+i,l}^{\bar{n}-1} \bar{R}_{kl} (\bar{z}_{k+i,l} - \bar{m}_{kl})} \quad (i = \bar{0}, \bar{2}); \quad (3.9)$$

$\bar{z}_{k+i,l}$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = \bar{z}_{0kl} + \bar{R}_{kl} \left( \bar{z}_{k+i,l} + \frac{\bar{m}_{kl}}{\bar{z}_{k+i,l}} \right), \quad (3.10)$$

Используя метод наименьших квадратов [5], для определения коэффициентов  $a_{kln}$  получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

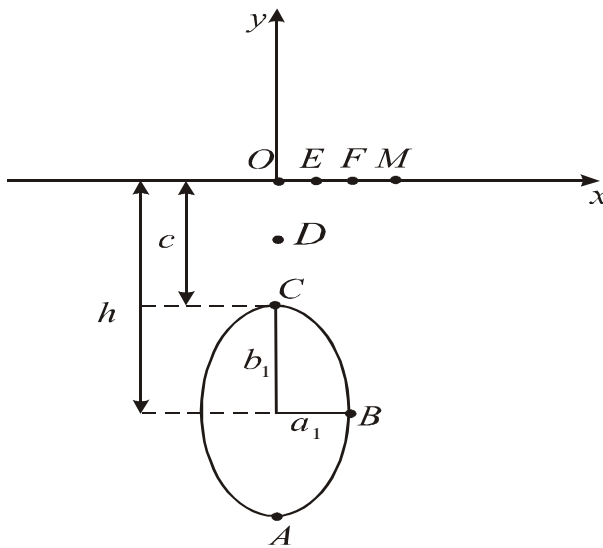
$$\sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^L \sum_{p=1}^{\infty} \{ r_{mklns} (j_{srp} a_{srp} - \bar{r}_s \bar{j}_{srp} \bar{a}_{srp} - \bar{s}_{s+1} \bar{j}_{s+1,rp} \bar{a}_{s+1,rp} - \bar{e}_{s+2} \bar{j}_{s+2,rp} \bar{a}_{s+2,rp}) + s_{mklns} (\bar{j}_{srp} \bar{a}_{srp} - r_s j_{srp} a_{srp} - s_{s+1} j_{s+1,rp} a_{s+1,rp} - e_{s+2} j_{s+2,rp} a_{s+2,rp}) \} = \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^3 (r_{mklns} j'_s(z_s) + s_{mklns} \bar{j}'_s(z_s) + j'_{kln}(z_{km}) [g_{1kl}^0 f_{1m} + g_{2kl}^0 f_{2m} + g_{3kl}^0 f_{3m}]) \quad (k = \bar{1}, \bar{3}, l = \bar{1}, \bar{L}, n = 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_{mklns} &= j'_{kln}(z_{km}) (g_{1kl}^0 g_{1sr}^0 + g_{2kl}^0 g_{2sr}^0 + g_{3kl}^0 g_{2sr}^0), \\ s_{mklns} &= j'_{kln}(z_{km}) (g_{1kl}^0 g_{1sr}^{-0} + g_{2kl}^0 g_{2sr}^{-0} + g_{3kl}^0 g_{3sr}^{-0}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

После решения системы (3.11) по известным формулам [3] можно вычислять механические и электрические характеристики (2.5) – (2.8) электроупругого состояния пьезоэлектрической полуплоскости. Если контур  $L_l^-$  вырождается в прямолинейный разрез – трещину, то можно вычислять также коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва  $k_1$ , поперечного сдвига  $k_2$  и индукции  $k_D$  [3, 6].

**§ 4. Исследование напряженного состояния полуплоскости с эллиптическим отверстием или трещиной.** Проведены численные



**Рис.1**

Для бифталата калия (материал М1):

$$\begin{aligned} s_{11}^D &= 9,7262 \cdot 10^{-11}, & s_{22}^D &= 9,1859 \cdot 10^{-11}, & s_{33}^D &= 9,6830 \cdot 10^{-11}, \\ s_{44}^D &= 20,5359 \cdot 10^{-11}, & s_{55}^D &= 16,0500 \cdot 10^{-11}, & s_{66}^D &= 13,0825 \cdot 10^{-11}, \\ s_{12}^D &= -4,8434 \cdot 10^{-11}, & s_{13}^D &= -3,4234 \cdot 10^{-11}, & s_{23}^D &= -0,4849 \cdot 10^{-11} (\text{Па}^{-1}); \\ g_{16} &= -0,5040 \cdot 10^{-16}, & g_{21} &= -0,1579 \cdot 10^{-15}, & g_{22} &= 0,5665 \cdot 10^{-16}, \\ g_{23} &= 0,9098 \cdot 10^{-16}, & g_{34} &= 0,4667 \cdot 10^{-16} (\Phi / \text{м}); \\ b_{11}^t &= 0,1679, & b_{22}^t &= 0,2459, & b_{33}^t &= 0,2591; \\ m_1 &= 0,6134 + 0,7571 i, & m_2 &= -\bar{m}_1, & m_3 &= 1,2101 i. \end{aligned}$$

Для бифталата рубидия (материал М2):

$$s_{11}^D = 11,3302 \cdot 10^{-11}, \quad s_{22}^D = 13,9774 \cdot 10^{-11}, \quad s_{33}^D = 10,1781 \cdot 10^{-11},$$

исследования распределения напряжений и изменения коэффициентов интенсивности в пьезоэлектрической полуплоскости с эллиптическим отверстием с полуосями  $a_1, b_1$  или трещиной длины  $2b_1$  (рис.1), когда полуплоскость была изготовлена из материалов кристаллографического класса  $mm2$  ромбической системы бифталата калия или рубидия [7, 8].

$$s_{44}^D = 19,3773 \cdot 10^{-11}, \quad s_{55}^D = 15,6700 \cdot 10^{-11}, \quad s_{66}^D = 13,9839 \cdot 10^{-11},$$

$$s_{12}^D = -6,3032 \cdot 10^{-11}, \quad s_{13}^D = -3,6732 \cdot 10^{-11}, \quad s_{23}^D = -0,4632 \cdot 10^{-11} \text{ (Па}^{-1}\text{)};$$

$$g_{16} = -0,2153 \cdot 10^{-16}, \quad g_{21} = -0,2652 \cdot 10^{-15}, \quad g_{22} = 0,1124 \cdot 10^{-15},$$

$$g_{23} = 0,1306 \cdot 10^{-15}, \quad g_{34} = 0,3009 \cdot 10^{-16} \text{ (}\Phi / \text{м)};$$

$$b_{11}' = 0,1857 \quad b_{22}' = 0,2605 \quad b_{33}' = 0,2565;$$

$$m_1 = 0,7245 + 0,7634 i, \quad m_2 = -\bar{m}_1, \quad m_3 = 1,1979 i.$$

Исследования проведены для трех способов нагружения: растяжения на бесконечности усилиями  $S_x^\infty = p$ , внутреннего давления интенсивности  $q$  на контуре отверстия (берегах трещины) и равномерного давления интенсивности  $q_0$  отрезке  $[-1, 1]$  границы полуплоскости.

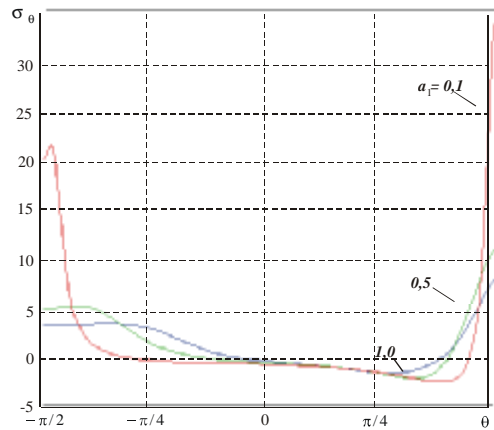


Рис.2

Приводимые ниже значения в таблицах и на рисунках даны с точностью до интенсивности нагрузки, как множителя.

Таблица 1

$a_1$	Точки								
	A		B	C		D	O	E	M
	$S_x$	$k_1$	$S_y$	$S_x$	$k_1$	$S_x$	$S_x$	$S_x$	$S_x$
2	2,05	–	-0,60	6,15	–	3,29	0,44	2,65	2,35
1	3,04	–	-0,75	8,29	–	4,27	0,34	4,24	1,12
0,5	4,96	–	-0,86	11,26	–	5,21	-0,19	3,41	0,81
0,1	20,11	–	-0,99	32,27	–	4,89	0,17	2,49	0,74
0,01	190,30	–	-1,02	283,70	–	5,03	0,90	2,34	0,74
$10^{-3}$	1892	1,2498	-1,02	2803	1,8486	5,06	0,99	2,32	0,74
$10^{-6}$	$2 \cdot 10^7$	1,2487	-1,02	$3 \cdot 10^7$	1,8486	5,07	1,00	2,32	0,74

В табл.1 даны значения напряжений в характерных точках растягиваемой полуплоскости из материала М1 с эллиптическим отверстием в зависимости от длины горизонтальной полуоси эллипса  $a_1$ . При этом полуось  $b_1 = 1$ , а характерные точки имели координаты:  $A(0; -h - b_1)$ ,  $B(a_1; -h)$ ,  $C(0; -c)$ ,  $D(0; -c/2)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $E(0,5b_1; 0)$ ,  $F(b_1; 0)$ ,  $M(1,5b_1; 0)$ , где  $h$  – расстояние от границы полуплоскости

до центра отверстия или трещины;  $c = h - b_1$  – ширина перемычки. Для случая, когда отверстие вырождается в трещину длины  $2b_1$ , в табл.1 даны также значения КИН  $k_1$  (для рассматриваемого случая  $k_2 = k_D = 0$ ). На рис.2 изображены графики изменения нормальных напряжений  $S_q$  вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к нему, в зависимости от центрального угла  $q$  отверстия, отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки. Как следует из данных табл.1 и рис.2, с уменьшением  $a_1$  концентрация напряжений вблизи вертикальной оси эллипса и в зоне между отверстием и границей растет. При  $a_1 \leq 0,001$  эллипс может считаться трещиной.

**Таблица 2**

Материал	c	Точки								
		A	B	C	D		O	E	F	M
		$S_x$	$S_y$	$S_x$	$S_x$	$S_y$	$S_x$	$S_x$	$S_x$	$S_x$
<b>Растяжение на бесконечности</b>										
M1	2	2,62	-1,13	2,77	1,23	0,21	0,83	0,89	1,03	1,19
	1	2,71	-1,17	2,87	1,57	0,27	0,65	0,99	1,48	1,62
	0,5	2,82	-1,13	4,07	2,10	0,23	0,47	1,57	2,12	1,77
	0,1	3,04	-0,75	8,29	4,27	0,10	0,34	4,24	2,20	1,12
	0,01	3,18	-0,34	17,68	15,21	-0,02	12,75	3,24	0,95	0,38
M2	2	2,64	-0,98	2,79	1,22	0,18	0,85	0,89	1,01	1,16
	1	2,73	-1,01	3,22	1,55	0,26	0,66	0,97	1,45	1,61
	0,5	2,84	-0,97	4,07	2,11	0,24	0,46	1,55	2,11	1,80
	0,1	3,06	-0,65	8,37	4,33	1,10	0,37	4,28	2,23	1,16
	0,01	3,22	-0,30	18,07	15,54	-0,02	13,02	3,29	0,97	0,41
<b>Внутреннее давление на контуре отверстия</b>										
M1	2	0,56	0,70	0,63	0,45	-0,05	0,33	0,33	0,33	0,28
	1	0,57	0,93	0,80	1,02	-0,18	1,00	0,89	0,57	0,20
	0,5	0,58	1,27	1,08	2,00	-0,34	2,70	1,56	0,33	-0,24
	0,1	0,60	1,95	1,30	9,55	-0,47	17,74	-1,01	-1,69	-1,23
	0,01	0,79	2,45	55,67	67,99	-0,07	80,34	-10,4	-3,82	-2,14
<b>Равномерное давление на границе полуплоскости</b>										
M1	2	-0,19	0,82	-0,57	0,30	0,69	-0,79	-0,81	–	0,02
	1	-0,23	1,20	-0,89	0,82	0,64	-0,15	-0,46	–	-0,28
	0,5	-0,27	1,56	-1,02	1,53	0,48	1,64	-0,28	–	-0,71
	0,1	-0,33	2,04	-3,12	7,82	0,47	16,70	-4,64	–	-1,09
	0,01	-0,21	2,30	45,66	59,54	0,94	71,50	-13,34	–	-1,50

В табл.2 для различных способов загрузки полуплоскости с круговым отверстием единичного радиуса даны значения напряжений в тех же характерных точках, а на рис.3 изображены графики изменения напряжений  $S_q$  вблизи контура отверстия на площадках, перпен-



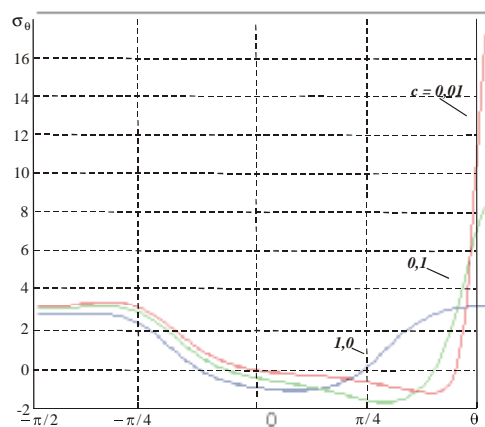


Рис.3

дикулярных к нему. Как следует из табл. 2. и рис.3, при уменьшении расстояния ширины перемычки  $c$  происходит увеличение концентрации напряжений около контура отверстия и в зоне между отверстием и границей полуплоскости. Особенно большая концентрация напряжений возникает в точках перемычки, близких к контуру отверстия.

Таблица 3

Материал	c	Точки							
		A	B	C	D	O	E	F	M
		$k_1$	$S_y$	$k_1$	$S_x$	$S_x$	$S_x$	$S_x$	$S_x$
<b>Растяжение на бесконечности</b>									
M1	1	1,0692	-1,08	1,1159	1,46	1,00	1,23	1,48	1,36
	0,5	1,1204	-1,11	1,2473	1,95	1,00	1,99	1,64	1,19
	0,1	1,2487	-1,02	1,8486	5,07	1,00	2,32	1,13	0,74
	0,01	1,3764	-0,77	3,8204	29,80	1,00	1,55	0,67	0,43
M2	1	1,0733	-0,95	1,1224	1,45	1,00	1,19	1,48	1,40
	0,5	1,1266	-0,96	1,2582	1,93	1,00	1,95	1,71	1,24
	0,1	1,2581	-0,88	1,8703	5,00	1,00	2,42	1,19	0,76
	0,01	1,3878	-0,66	3,8637	29,25	1,00	1,62	0,71	0,44
<b>Внутреннее давление на берегах трещины</b>									
M1	1	1,0692	-1,08	1,1159	0,46	0	0,23	0,48	0,36
	0,5	1,1204	-1,11	1,2472	0,95	0	0,99	0,64	0,19
	0,1	1,2486	-1,02	1,8486	4,07	0	1,32	0,13	-0,26
	0,01	1,3763	-0,77	3,8203	28,80	0	0,55	-0,33	-0,57
<b>Равномерное давление на границе полуплоскости</b>									
M1	1	0,0320	0,43	0,1217	0,55	-0,97	-0,96	-	0,02
	0,5	0,0774	0,52	0,3267	0,92	-0,97	-0,79	-	0,01
	0,1	0,1910	0,61	0,8520	2,64	-0,97	-0,64	-	-0,13
	0,01	0,2764	0,75	1,9751	15,68	-0,97	-1,00	-	-0,28

Для полуплоскости с вертикальной трещиной единичной полудлины в табл.3 даны значения напряжений в характерных точках и. КИН  $k_1$  ( $k_2 = k_D = 0$ ) в концах трещины для различных материалов и длин перемычек. Из результатов табл.3 следует, что при сближении трещины с прямолинейной границей значения напряжений в зоне между тре-

щиной и границей полуплоскости и коэффициентов  $k_1$  растут. При этом значения напряжений на берегах трещины изменяются незначительно.

Как показывают исследования, на характер распределения напряжений и их концентрацию значительно влияет “степень” анизотропии материала полуплоскости. На значения же КИН влияние анизотропии существенно, если нагрузка действует на границе полуплоскости. Для других из рассмотренных нагрузок это влияние незначительно.

Как показывают исследования, на характер распределения напряжений и их концентрацию значительно влияет “степень” анизотропии материала полуплоскости. На значения же КИН влияние анизотропии существенно, если нагрузка действует на границе полуплоскости. Для других из рассмотренных нагрузок это влияние незначительно.

#### Список использованной литературы

1. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин // Прикладная механика. – 1975. – Т.1, № 5. – С. 45–53.
2. Калоеров С.А., Баева А.И. Комплексные потенциалы электроупругости для многосвязных пластин с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 75–87.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В. Концентрация напряжений в анизотропном полупространстве с цилиндрическими полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 63–75.
5. Калоеров С. А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя и др. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
6. Калоеров С.А. Приближенный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для двумерных многосвязных тел с прямолинейными трещинами // Теорет. и прикладная механика. –1993. – Вып. 24. – С. 27–33.
7. Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства./ Беляев Л. М., Беликова Г. С., Гильварг А. Б., и др.// Кристаллография.– 1969.– Т.14, № 4.– С. 645–651.
8. Беликова Г. С., Писаревский Ю. В., Сильвестрова В. М. Пьезоэлектрические и упругие свойства кристаллов бифталата рубидия.// Кристаллография.– 1974.– Т.19, № 4.– С. 878–879.

Поступила в редколлегию 23.07.2000