МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 514.12

А. И. КРИВОРУЧКО, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ

Получены образующие кольца инвариантов группы H, порожденной отражениями и удовлетворяющей следующему условию: H-орбиты направлений симметрии этой группы бесконечны, а их линейные оболочки образуют тройку плоскостей с попарными нулевыми пересечениями. Выделены условия, при которых кольцо инвариантов группы H не является свободным.

В [1] найдены рациональные инварианты бесконечной группы H преобразований линейного вещественного n-мерного пространства V, удовлетворяющей следующим условиям:

1) Группа порождается объединением трех образованных отражениями попарно непересекающихся множеств M_i, каждое из которых определяется некоторой плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой j_i в следующем смысле: отражение (P,d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A$, а P сопряжена d относительно j_i.

2) Ядро каждой квадратичной формы j_i имеет нулевое пересечение с A_i; сужение j_i на A_i имеет ненулевое ядро B_i.

3) Если два отражения принадлежат группе и не коммутируют между собой, то они оба содержатся в некотором M_i.

4) Плоскости A_i имеют нулевые попарные пересечения.

С использованием полученных при этом результатов ниже вычисляются полиномиальные инварианты такой группы. Аналогичная задача для некоторых групп, удовлетворяющих условиям 1) – 3), но не удовлетворяющих условию 4), решается в [2].

1. Пусть H обозначает группу преобразований пространства V, обладающую указанными выше свойствами 1) – 4). Зафиксируем в V базис $\left(a_{ij}, b_{il}, c_k : \ 1 \le i \le 3; \ 1 \le j \le k_i; \ 1 \le l \le s_i; \ 1 \le k \le m\right)$ с координатными функциями

$$y_{ij} = a_{ij}^*, \quad z_{il} = b_{il}^*, \quad x_k = c_k^*, \tag{1}$$

для которого, в соответствии с [1],

$$B_i = \langle b_{il} : \ l \ge 1 \rangle \ (i \le 2), \ B_3 = \langle b_{1p} + b_{2p} : \ p \le s \rangle \oplus \langle b_{3l} : \ l \ge 1 \rangle,$$

$A_i = \langle a_{ij} : j \geq 1 \rangle \oplus B_i$ $(i \leq 3)$, $j_i = h_i$ $(i \leq 2)$, и $j_3 = h_3 + 2\sum_p z_{1p} q_p$, где $h_i = \sum_{j,l} (e_{ij} y_{ij}^2 + 2 z_{il} x_{il})$ $(i \leq 3)$, $x_{il}, q_p \in \langle x_k : k \geq 1 \rangle$, $e_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Положим $X = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$, K – кольцо всех вещественных многочленов от переменных (1); K^H – кольцо полиномиальных инвариантов группы H;

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1s} \\ x_{21} & \ldots & x_{2s} \\ q_1 & \ldots & q_s \end{pmatrix}.$$

Теорема. K^H *в системе координат (1) представимо в виде* $X[\Sigma]$, *где* Σ *– одна из следующих систем многочленов (удовлетворяющих соответствующим ограничениям):*

(a) h_1, h_2, h_3 $(s = 0)$;

(b) $h_1 + a_1 h_3$, $h_2 + a_2 h_3$ *(*$s \geq 1$*;* $x_{ip} = a_i q_p$ *для всех* $i \leq 2$ *и* $p \leq s$*);*

(c) $b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3$, $a_1(h_1 q_1 + h_3 x_{11}) + a_2(h_2 q_1 + h_3 x_{21})$ *(*$s = 1$*; хотя бы две из трех форм* x_{11}, x_{21}, q_1 *неколлинеарны друг другу, но* $b_1 x_{11} + b_2 x_{21} = b_3 q_1$, $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, *где* $a_i, b_j \in \mathbb{R}$*);*

(d) $h_1 q_1 + h_3 x_{11}$, $h_2 q_1 + h_3 x_{21}$, $h_1 x_{21} - h_2 x_{11}$ *(*$s = 1$*; формы* x_{11}, x_{21}, q_1 *линейно независимы); в этом случае* K^H *несвободно, а*

$$(h_1 q_1 + h_3 x_{11}) x_{21} - (h_2 q_1 + h_3 x_{21}) x_{11} + (h_1 x_{11} - h_2 x_{21}) q_1 = 0$$

- определяющее соотношение между образующими кольца K^H*;*

(e) $b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3$ *(*$s \geq 2$*; строки* Δ *не пропорциональны друг другу, но* $b_1 x_{1p} + b_2 x_{2p} = b_3 q_p$ *для всех* $p \leq s$ *и хотя бы один из вещественных коэффициентов* b_i *отличен от 0);*

(f) $h_1 f_2 - h_2 f_1 + h_3(a_1 f_2 - a_2 f_1)$ *(*$s \geq 2$*;* f_1 *и* f_2 *– неколлинеарные друг другу линейные формы,* $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_{ip} = a_i q_p + m_p f_i$ *для всех* $i \leq 2$ *и* $p \leq s$, *где* $m_p \in \mathbb{R}$ *и* $\sum m_p^2 \neq 0$*);*

(g) $h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3$ *(*$s = 2$*;* f_1, f_2, f_3 *- линейно независимые линейные формы,* $x_{1i} = a_i f_2 - b_i f_3$, $x_{2i} = -a_i f_1 + g_i f_3$, $q_i = b_i f_1 - g_i f_2$, *где* $a_i, b_i, g_i \in \mathbb{R}$ $(i \leq 2)$*);*

(h) $h_1(x_{22} q_1 - x_{21} q_2) + h_2(x_{11} q_2 - x_{12} q_1) + h_3(x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21})$ *(*$s = 2$*;* $x_{11} q_2 - x_{12} q_1$ *и* $x_{22} q_1 - x_{21} q_2$ *взаимно просты);*

(i) 1 *(*$s \geq 3$ *и хотя бы один минор третьего порядка матрицы* Δ *отличен от 0).*

2. Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* Φ *- поле характеристики 0,* $S = \Phi[v_1,..., v_m]$, $S' = \Phi[v_{i_1},..., v_{i_q}]$ *- кольца многочленов над* Φ, $P_j = \sum\limits_{i \le r_j} j_{ji} w_j^i$, *где* $j_{ji} \in S \quad (1 \le j \le k)$, $T_j \in S'$, *причем* $\prod_j j_{jr_j}$ *и* $\prod_j T_j$ *взаимно просты в* S. *Тогда* $S'\left[\frac{P_1}{T_1},..., \frac{P_k}{T_k}\right] \mathbf{I}\ S[w_1,..., w_k] = S'[P_1,..., P_k]$.

Доказательство. Пусть $f = f(t_1,...,t_k) = \sum g_{i_1...i_k} t_1^{i_1} \cdots t_k^{i_k}$, где $g_{i_1...i_k} \in S'$. Тогда $x := f\left(\frac{P_1}{T_1},..., \frac{P_k}{T_k}\right) = \sum r_{i_1...i_k} w_1^{i_1} \cdots w_k^{i_k}$, где $r_{i_1...i_k} \in \Phi(v_1,...,v_m)$.

Докажем, что если $x \in S[w_1,...,w_k]$, то $x \in S'[P_1,...,P_k]$.

Предположим, что это утверждение (очевидное, если $f \in S'$) доказано для всех многочленов f, содержащих не более l мономов $g_{i_1...i_k} t_1^{i_1} \cdots t_k^{i_k}$ ненулевой степени $i_1 + \cdots + i_k$. Рассмотрим многочлен f, число мономов положительной степени которого равно $l+1$. В частично упорядоченном по наборам $(i_1,..., i_k)$ степеней множестве этих мономов выберем максимальный моном $g t_1^{l_1} \cdots t_k^{l_k}$. Тогда

$$r_{l_1...l_k} = \frac{g}{T_1^{l_1} \cdots T_k^{l_k}} \cdot j_{1r_1}^{l_1} \cdots j_{kr_k}^{l_k} \in S.$$

Многочлены $j_{1r_1}^{l_1} \cdots j_{kr_k}^{l_k}$ и $T_1^{l_1} \cdots T_k^{l_k}$ взаимно просты в S. Следовательно, $g = \Theta \cdot T_1^{l_1} \cdots T_k^{l_k}$, где $\Theta \in S$, причем T_j, $g \in S'$, т.е. и $\Theta \in S'$, а $f(t_1,...,t_k) = \Theta \cdot \prod_i (T_i t_i)^{l_i} + f'(t_1,...,t_k)$, где $f'(t_1,..., t_k)$ содержит l мономов положительной степени. Полагая $x' = f'\left(\frac{P_1}{T_1},...,\frac{P_k}{T_k}\right)$, имеем: $x - x' \in S'[P_1,...,P_k]$. Отсюда $x' \in S[w_1,...,w_k]$, а тогда, по индуктивному предположению, $x' \in S'[P_1,..., P_k]$. Значит, $x \in S'[P_1,..., P_k]$. Лемма доказана.

Положим $Y_0 = X[y_{it}, z_{pq} : i, p, q \ge 1; t \ge 2]$, $t_i = h_i + h_3 x_{i1} q_1^{-1}$, $F_i = t_i q_1 = h_i q_1 + h_3 x_{i1} \quad (i \le 2)$, $F_3 = h_1 x_{21} - h_2 x_{11}$.

Лемма 2. *Пусть* $f(t_1, t_2, t_3) \in X[t_1, t_2, t_3]$, $f(F_1, F_2, F_3) = 0$ *и* $x_{i1} = x_i$, $q_1 = x_3$. *Тогда* $f = (t_1 x_2 - t_2 x_1 - t_3 x_3) h$, *где* $h \in X[t_1, t_2, t_3]$.

Доказательство. Положим $g = t_1 x_2 - t_2 x_1 - t_3 x_3$. В комплексном координатном пространстве с линейными координатами t_1, t_2, t_3, $x_1,..., x_m$ пусть M – конус, заданный уравнением $g=0$, N – его плотное в топологии Зарисского подмножество, определяемое условием $x_3 \neq 0$. Для каждой точки $(t_1,t_2,t_3,x_1,\dots,x_m)$, принадлежащей N, найдутся u_1,u_2,u_3, удовлетворяющие уравнениям

$$x_3u_1+x_1u_3=t_1,\ x_3u_2+x_2u_3=t_2,\ x_2u_1-x_1u_2=t_3.$$

В свою очередь, для u_i и x_k, удовлетворяющих этим уравнениям, имеет решение (возможно, комплексное) система уравнений $h_i=u_i$ $(1\le i\le 3)$. Для определяемой решением этой системы точки комплексификации пространства V имеем: $F_i=t_i$ $(i\le 3)$. Поэтому $f(t_1,t_2,t_3)=0$. Следовательно, $f\big|_N=0$, и, по теореме Гильберта о нулях, f принадлежит радикалу идеала J, порождаемого многочленом g, который неприводим. Поэтому $f\in J$.

Лемма 3. *Пусть* $x_{i1}=x_i$, $q_1=x_3$. *Тогда*

$$X[t_1,t_2]\cap K=X[F_1,F_2,F_3].$$

Доказательство. Для $A_{ij}\in X$ положим

$$c_l(t_1,t_2)=\sum_{i+j=l}A_{ij}t_1^it_2^j,\ c(t_1,t_2)=\sum_{l\ge 0}c_l(t_1,t_2)\in X,\ \ c_l'=c_l(t_1,t_2).$$

Тогда $c_l'=\sum\limits_{i+j+k=l}B_{ijk}y_{11}^{2i}y_{21}^{2j}y_{31}^{2k}$, где $B_{ijk}\in Y:=X'[y_{it},z_{pq}:i,p,q\ge 1;\ t\ge 2]$, а X' – поле частных кольца X. Следовательно, многочлен c_l', как элемента кольца $Y[y_{11},y_{21},y_{31}]$, является суммой всех мономов степени $2l$ многочлена $c':=c(t_1,t_2)$ этого же кольца. Поэтому B_{ijk} являются коэффициентами многочлена c'. Но $K=Y_0[y_{11},y_{21},y_{31}]$, и если $c'\in K$, то все $B_{ijk}\in Y_0$, а это означает, что все $c_l'\in K$.

Остается доказать следующее :

(*) Если $c_l'\in K$, то $c_l'\in X[F_1,F_2,F_3]$.

Пусть это утверждение, очевидное при $l=0$, доказано для всех $l<l$, и $c_l'\in K$. Если степень A_{ij} относительно x_3 не меньше l, то $A_{ij}t_1^it_2^j-A_{ij}'t_1^it_2^j\in X[F_1,F_2]$ для некоторого A_{ij}', принадлежащего X, степень которого относительно x_3 уже меньше l. Поэтому при доказательстве (*) можно считать, что степень относительно x_3 коэффициентов A_{ij} многочлена $c_l(t_1,t_2)$ меньше l.

Из леммы 1, полагая $P_1=h_3$, $w_1=y_{31}$, $T_1=x_3$, для некоторых B_i и C_j, принадлежащих K и не зависящих от y_{3j}, получаем:

$$c_l'=c_l(x_1,x_2)\left(\frac{h_3}{x_3}\right)^l+\sum_{i<l}B_i\left(\frac{h_3}{x_3}\right)^i=\sum_{j=0}^{k}C_jh_3^j.$$

Сравнивая в этом представлении c'_l степени относительно y_{3j}, а затем учитывая, что степень $c_l(x_1,x_2)$ относительно x_3 меньше l, имеем: $c_l(x_1,x_2)=C_l x_3^l=0$. Отсюда $c_l(t_1,t_2)$ принадлежит идеалу, порожденному многочленом $g:=t_1x_2-t_2x_1$.

В самом деле, в комплексном координатном пространстве с линейными координатами $t_1,t_2,x_1,...,x_m$ рассмотрим конус M, заданный уравнением $g=0$. Пусть точка $(t_1,t_2,x_1,...,x_m)$ принадлежит плотному подмножеству N конуса M, определяемому условием $x_1\neq 0$. Тогда $t_i=mx_i\,(i\le 2)$ и $c_l(t_1,t_2)=m^l c_l(x_1,x_2)=0$. Значит, $c_l\big|_N=0$, и, по теореме Гильберта о нулях, $c_l(t_1,t_2)$ принадлежит радикалу идеала, порожденного неприводимой формой g.

Поэтому $c_l(t_1,t_2)=(t_1x_2-t_2x_1)\sum\limits_{i+j=l-1}B_{ij}t_1^it_2^j$, где $B_{ij}\in X$.

Отсюда $c'_l=F_3\sum\limits_{i+j=l-1}B_{ij}t_1^it_2^j=F_3fx_3^{1-l}$, где $f\in K$. Следовательно, $c'_lx_3^{l-1}=F_3f$, причем x_3 и F_3 взаимно просты в K. Таким образом, $\sum\limits_{i+j=l-1}B_{ij}t_1^it_2^j=fx_3^{1-l}\in K$, и, по индуктивному предположению, $fx_3^{1-l}\in X[F_1,F_2,F_3]$.

Лемма 4. *Пусть хотя бы две из трех форм* x_{11},x_{21},q_1 *не коллинеарны друг другу, но при этом* $b_1x_{11}+b_2x_{21}=b_3q_1$ *и* $a_1b_2\neq a_2b_1$ *для некоторых вещественных* a_i,b_j. *Тогда*

$$K\cap X[t_1,t_2]=X\left[b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3,\ a_1F_1+a_2F_2\right].$$

Доказательство. Пусть $f\in K\cap X[t_1,t_2]$. Тогда f – многочлен, четный относительно каждого y_{ij}, и поэтому

$$f\in Y_0[y_{11}^2,y_{21}^2,y_{31}^2]\cap X[t_1,t_2]=$$

$$=Y_0\left[\sum_{i=1}^{3}b_ie_{i1}y_{i1}^2,\ \sum_{i=1}^{2}a_ie_{i1}y_{i1}^2,\ y_{31}^2\right]\cap X\left[\sum_{i=1}^{2}b_it_i,\ \sum_{i=1}^{2}a_it_i\right].$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{2}b_it_i=\sum\limits_{i=1}^{3}b_ih_i$, $\sum\limits_{i=1}^{2}a_it_i=\sum\limits_{i=1}^{2}a_ih_i+q_1^{-1}h_3\sum\limits_{i=1}^{2}a_ix_{i1}$. Остается применить лемму 1, полагая при этом $P_1=\sum\limits_{i=1}^{3}b_ih_i$, $w_1=\sum\limits_{i=1}^{3}b_ie_{i1}y_{i1}^2$,

$$T_1=1,\ P_2=q_1\sum_{i=1}^{2}a_ih_i+h_3\sum_{i=1}^{2}a_ix_{i1},\ w_2=y_{31}^2,\ T_2=q_1.$$

3. Докажем сформулированную в п. **1** теорему. Из леммы 1 и равенства (6) работы [1] следует, что

$$K^H \subseteq X[h_1, h_2, h_3], \tag{2}$$

и если $s = 0$, то получаем (a).

Если $s > 0$ и строки матрицы Δ пропорциональны друг другу, то из (2) и равенства (9) работы [1] получаем (b).

Если $s \geq 2$ и строки матрицы Δ не пропорциональны друг другу, но линейно зависимы над $\mathbb{R}$, то из (2) и равенств (11) и (12) работы [1] получаем (e).

Если $s > 2$ и строки матрицы Δ линейно независимы над $\mathbb{R}$, но все миноры третьего порядка этой матрицы равны 0, то из [3], равенств (11) и (12) работы [1], а также леммы 1, получаем (f). Если же хотя бы один минор третьего порядка матрицы Δ не равен 0, то из равенства (13) работы [1] получаем (i).

Если $s = 2$, а $x_{11}q_2 - x_{12}q_1$ и $x_{22}q_1 - x_{21}q_2$ взаимно просты, то из равенства (11) работы [1], а также леммы 1, получаем (h).

Если $s = 2$, но ни одно из условий (b), (e), (f), (h) не выполнено, то из леммы 1 и равенств (11) и (14) работы [1] получаем (g).

Допустим теперь, что $s = 1$, но условие (b) не выполнено. Тогда если x_{11}, x_{21}, q_1 линейно зависимы, то из (2) и равенства (9) работы [1], используя лемму 4, получаем (c); в противном случае (используя леммы 2 и 3) получаем (d).

Замечание. В случаях (g) и (i) кольцо K^H вырожденно [1], и поэтому группа H действует лишь на цилиндрических алгебраических поверхностях; в случае (e) группа H является собственной подгруппой группы, сохраняющей все инварианты группы H, но порожденной лишь одним квадратичным множеством отражений. При выполнении указанных в [3] условий, в остальных случаях $\bigcup_{i=1}^{3} M_i$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы H, а в случае (e) кольцо K^H невырожденно.

Список использованной литературы

1. Криворучко А.И. О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. 1999. Вып. 15. – С. 170 –177.
2. Игнатенко В.Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. II // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. – С. 42–51.
3. Криворучко А.И. О кольцах инвариантов групп, порожденных тремя орбитами отражений // Симферополь, 1995. – 14 с. – Деп. в ГНТБ Украины, № 2075 – Ук 95.

Поступило в редколлегию 20.05.2000