Теорема. *Пусть* $A \in K_+^r$ *и имеет место оценка* $vrai \max\limits_{a \le x \le b} \left\| s^*(x) s(x) \right\| < \infty$. *Тогда кратность спектра* s *простой части оператора равна* $s = vrai \max\limits_{a \le x \le b} rang\, G_A(x)$, *где* $G_A(x)$*– неотрицательная компонента полярного разложения разности предельных значений* $c_A^{\pm}(x) = \lim\limits_{t \to +0} c_A(l)$, $l = x \pm it$; a, b *такие, что* $-\infty \le a \le b \le +\infty$ *и* $c_A^+(x) = c_A^-(x)$ *для всякого* $x \notin [a, b]$.

Список использованной литературы

1. Kuzhel A. Characteristic Function and Models of Nonself – Adjoint Operators. – Kluwer: Dordrecht, 1996. – 237p.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища школа, 1977. – Т.1. – 315 с.
3. Сахнович Л.А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром.//Труды моск. мат. об-ва , 1968. – Т. 19. – С. 211-270.
4. Москалева Ю.П. Неограниченные диссипативные операторы.//Труды математического факультета, 1997. – С. 88-89.

Поступила в редколлегию 25.09.2000

УДК 517.98

И.В.ОРЛОВ, канд. физ.-мат. наук,Таврический нац. ун-т.

ТЕОРЕМА МАККИ–АРЕНСА ДЛЯ ШКАЛ ПРОСТРАНСТВ

Теорема Макки–Аренса о топологиях, согласованных с двойственностью, перенесена на двойственность индуктивных шкал пространств.

0. Введение. Предварительные сведения

0.1. Проблема Макки и ее обобщение. Проблема Макки в классической теории двойственности состоит в полном описании всех локально выпуклых топологий $t(E,F)$ на векторном пространстве E, согласованных с двойственностью $< E,F >$, т.е. таких, что $(E,t(E,F))^* \cong F$.

Решение этого вопроса служит необходимой ступенью дальнейших исследований теории двойственности. Ответ дает классическая теорема Макки–Аренса ([1], 8.3.2–8.3.3), основное содержание которой в следующем: топология $t(E,F)$ согласована с двойственностью $< E,F >$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$s(E,F) \le t(E,F) \le t(E,F). \qquad (MA)$$

Здесь $s(E,F)$ – слабая топология в E, $t(E,F)$ – топология Макки в E относительно $<E,F>$, т.е. топология равномерной сходимости на слабо компактных множествах из F.

Развитие функционального анализа в шкалах пространств, получивших в последние десятилетия широкое признание и применение, приводит к обобщению проблемы Макки на двойственность шкал пространств. Данная работа посвящена ответу на этот вопрос. В п.1 вводятся основные понятия, связанные с двойственностью шкал; в п.2 рассмотрены важнейшие примеры таких двойственностей. В п.3 содержится основной результат работы – теорема Макки–Аренса для двойственности шкал. При этом оказывается, что аналог условия (MA) является достаточным условием согласованности в общем случае, но необходимым условием – только в случае линейной шкалы $\vec{E}$.

Для простоты изложения мы рассматриваем далее только внутренние индуктивные шкалы пространств (с тождественными вложениями); общие определения см. в ([2], гл.1).

0.2. Индуктивные шкалы: основные определения. Систему векторных пространств $\vec{E} = \{E_i\}_{i \in I}$, индуктивно упорядоченную по векторному вложению: $(i_1 \le i_2) \Rightarrow (E_{i_1} \subseteq E_{i_2})$, назовем (внутренней) *индуктивной шкалой векторных пространств*. Множество $E \equiv |\vec{E}| = \underset{i \in I}{U} E_i$ назовем *носителем шкалы*. Шкала $\vec{E}$ *линейна*, если порядок в I линеен; шкала $\vec{E}$ *тривиальна*, если она содержит только одно пространство.

Если E_i – локально выпуклые пространства (ЛВП) с топологиями $t(E_i)$ и вложения $(E_{i_1}, t(E_{i_1})) \subseteq (E_{i_2}, t(E_{i_2}))$ непрерывны ($i_1 \le i_2$), то шкалу $\vec{E}^t = \{(E_i, t(E_i))\}_{i \in I}$ назовем (внутренней) *индуктивной шкалой ЛВП*. Две шкалы ЛВП *эквивалентны*, если каждое пространство одной шкалы непрерывно вложено в некоторое пространство другой шкалы, и обратно (очевидно, носители и топологии индуктивных пределов таких шкал совпадают). Всюду далее индуктивные шкалы ЛВП рассматриваются с точностью до эквивалентности.

Если система отображений $\vec{f} = \{f_i : E_i \to F\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию $(i_1 \le i_2) \Rightarrow (f_{i_2}|_{E_{i_1}} = f_{i_1})$, то назовем $\vec{f}$ (внутренней) *шкалой отображений* на $\vec{E}$ (со значениями в F). В частности, если $\vec{E}^t$ – индуктивная шкала ЛВП, и f_i – линейные непрерывные функционалы на $(E_i, t(E_i))$, то $\vec{f}$ назовем (внутренней) *функциональной шкалой* на

$\vec{E}$. Множество всех функциональных шкал на $\vec{E}^t$ обозначим через $\vec{E}^{t*}$.

Далее (теорема 3.2) нам понадобится следствие из обобщенной теоремы Хана–Банаха для линейных шкал ЛВП (см. [3], [4]): если $\vec{E}^t = \{(E_i, t(E_i))\}_{i \in I}$ – линейная шкала ЛВП, $f_{i_0} \in (E_{i_0}, t(E_{i_0}))^*$, то f_{i_0} может быть продолжен до функциональной шкалы $\vec{f}$ на всей шкале $\vec{E}^t$.

1. Двойственность индуктивных шкал пространств

1.1. Пусть $\vec{E} = \{E_i\}_{i \in I}$ и $\vec{F} = \{F^j\}_{j \in J}$ – индуктивные шкалы векторных пространств. Если для любых $i \in I$, $j \in J$ задана двойственность $< E_i, F^j >$ (билинейная форма на $E_i \times F^j$), причем система $< \vec{E}, \vec{F} > := \{< E_i, F^j >\}_{(i,j) \in I \times J}$ образует индуктивную шкалу билинейных форм на шкале $\vec{E} \times \vec{F}$, то шкалу $< \vec{E}, \vec{F} >$ назовем *двойственностью (дуальной парой)* шкал $\vec{E}$ и $\vec{F}$. Будем говорить, что двойственность $< \vec{E}, \vec{F} >$ *отделима по* $\vec{E}$ *(или* $\vec{F}$*)*, если порожденная ею двойственность носителей $< E, F >$ отделима по E (или F).

1.2. Пусть $< \vec{E}, \vec{F} >$ – двойственность. Если для любых $i \in I$, $j \in J$ в E_i определена локально выпуклая топология $r(E_i, F^j)$, согласованная с двойственностью $< E_i, F^j >$ (т.е. $(E_i, r(E_i, F^j))^* \cong F^j$), причем:

а) шкалы $(E_i \mid \vec{F})_r := \{(E_i, r(E_i, F^j))\}_{j \in J}$ – проективные ($i \in I$);

б) шкалы $(\vec{E} \mid F^j)_r := \{(E_i, r(E_i, F^j))\}_{i \in I}$ – инъективные ($j \in J$);

то систему $r(\vec{E}, \vec{F}) := \{r(E_i, F^J)\}_{(i,j) \in I \times J}$ назовем *(дуальным) оснащением шкалы* $\vec{E}$, а пару $\vec{E}_r := (\vec{E}, r(\vec{E}, \vec{F}))$ – *(дуально) оснащенной шкалой.*

Отметим, что дуальное оснащение порождает в пространствах шкалы $\vec{E}$ *дуальные топологии* проективных пределов $r(E_i, \vec{F}) := \varprojlim_{j \in J} r(E_i, F^j)$; относительно которых система $\vec{E}^r := \{(E_i, r(E_i, \vec{F}))\}_{i \in I}$ – индуктивная шкала ЛВП. Обратно, если $\vec{E}^r$ – индуктивная шкала ЛВП, то фактор–топологии $r(E_i, F^j) :=$ $:= r(E_i) / \ker < E_i, F^j >$ могут порождать дуальное оснащение $\vec{E}$.

1.3. Пусть $\vec{E}_r$ – оснащенная шкала, $\vec{j} = \{j_i\}_{i\in I} \in \vec{E}^{r*}$. Тогда для каждого $i \in I$ найдется такой $j = r(i) \in J$, определенный с точностью до увеличения, что $j_i \in (E_i, r(E_i, F^j))^*$. Отображение $i \mapsto j = r(i)$ назовем *дуальным индексом функциональной шкалы* $\vec{j}$ (относительно данного оснащения); $R = \{r\}$– множество всех дуальных индексов с поточечным индуктивным порядком.

Для каждого $r \in R$ пусть E^{*r} – множество всех функциональных шкал на $\vec{E}^{r*}$ с дуальным индексом r. Легко проверить, что система $\vec{E}_r^* := \{E^{*r}\}_{r\in R}$ – индуктивная шкала пространств с носителем $\vec{E}^{r*}$; назовем ее *(дуально) сопряженной шкалой* к оснащенной шкале $\vec{E}_r$.

2. Примеры дуальных оснащений

2.1. Слабое оснащение. Пусть $< \vec{E}, \vec{F} >$ – двойственность, $s(E_i, F^j)$ – слабые топологии в E_i относительно двойственностей $< E_i, F^j >$, $i \in I$, $j \in J$. Тогда система $s(\vec{E}, \vec{F}) := \{s(E_i, F^j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ образует дуальное оснащение $\vec{E}$; назовем его *слабым оснащением*. Отметим, что соответствующие дуальные топологии в E_i есть $s(E_i, F)$; они отделимы, если двойственность отделима по $\vec{E}$. В этом случае и обратно, оснащение, порожденное топологиями $s(E_i, F)$, совпадает с $s(\vec{E}, \vec{F})$.

В работе ([5]) автором получено обобщение классических теорем Банаха и Банаха–Гротендика о рефлексивности в слабой топологии на случай двойственности индуктивных шкал пространств:

$$(\vec{E}, s(\vec{E}, \vec{F}))^* \cong \vec{F}, \qquad (\overrightarrow{BG})$$

если двойственность $< \vec{E}, \vec{F} >$ отделима по $\vec{F}$. Этот результат будет использован ниже в п.3 для решения обобщенной проблемы Макки.

2.2. Оснащение Макки и другие S – оснащения. Пусть $< \vec{E}, \vec{F} >$ – двойственность, $t(E_i, F^j)$ – топологии Макки в E_i. Тогда система $t(\vec{E}, \vec{F}) := \{t(E_i, F^j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ образует дуальное оснащение $\vec{E}$; назовем его *оснащением Макки*. Аналогично определяются оснащения, порожденные другими стандартными S – топологиями (см. [1], 8.3), например:

сильное оснащение $b(\vec{E}, \vec{F}) := \{b(E_i, F^j)\}_{(i,j)\in I\times J}$;

оснащение Аренса $k(\vec{E}, \vec{F}) := \{k(E_i, F^j)\}_{(i,j)\in I\times J}$; и т.д.

2.3. Нормальное оснащение. В классической теории двойственности важную роль играет l – *топология* в сопряженном пространстве (см. [1], 8.4.14–8.4.18): если $\{U_i\}_{i\in I}$ – база окрестностей нуля в ЛВП E, $E^{*i}=\left\{f\in E^*\mid f\in span\ \overset{0}{U}_i\right\}$, $\|f\|^i=\sup\limits_{x\in U_i}|f(x)|$, то l – топология в E^* – это топология индуктивного предела пространств $(E^{*i},\|\cdot\|^i)$.

Обозначим $l(E,E^{*i})$ топологию в E, порожденную окрестностью U_i; тогда система $l(E)=\left\{l(E,E^{*i})\right\}_{i\in I}$ образует дуальное оснащение E; назовем его *нормальным оснащением*. Из классической теоремы о проективном пределе банаховых пространств (см. [6]) следует, что если E – полное отделимое ЛВП, то топология в E, порожденная $l(E)$, совпадает с исходной.

Шкалу $\vec{E}^*_l=\{E^{*i}\}_{i\in I}$ назовем *нормально сопряженной шкалой* к ЛВП E; с точностью до эквивалентности, эта шкала не зависит от выбора исходной системы окрестностей. Нормируя E^{*i} нормами $\|\cdot\|^i$, мы получим индуктивную шкалу банаховых пространств с рядом полезных свойств (см. [7]). Приведенную конструкцию легко обобщить, введя нормальное оснащение $l(\vec{E})$ индуктивной шкалы ЛВП $\vec{E}$ и нормальную сопряженную шкалу $(\vec{E},l(\vec{E}))^*$.

2.4 Тривиальное оснащение. Пусть $\vec{E}^t=\{(E_i,t(E_i))\}_{i\in I}$ – индуктивная шкала ЛВП. Положим $r_t(E_i,\vec{E}^{t*})=t(E_i)$ и назовем оснащение $r_t(\vec{E},\vec{E}^{t*}):=\left\{r_t(E_i,\vec{E}^{t*})\right\}_{i\in I}$ *тривиальным*. Легко видеть, что сопряженная шкала к тривиально оснащенной – это тривиальная шкала $\left\{\vec{E}^{t*}\right\}$.

3. Проблема Макки и теорема Макки–Аренса для шкал

3.1. Сформулируем проблему Макки для шкал пространств следующим образом. Пусть $r(\vec{E},\vec{F})$ – дуальное оснащение индуктивной шкалы векторных пространств $\vec{E}$ относительно двойственности $<\vec{E},\vec{F}>$. Будем говорить, что оснащение $r(\vec{E},\vec{F})$ *согласовано с двойственностью*, если дуально сопряженная к $\vec{E}_r$ шкала $\vec{E}^*_r$ изоморфна $\vec{F}$, т.е.

$$(\vec{E},r(\vec{E},\vec{F}))^*\cong\vec{F}. \qquad (\vec{M})$$

Требуется описать все оснащения, согласованные с данной двойственностью $<\vec{E},\vec{F}>$. В частности, обобщенная теорема Банаха–

Гротендика (см. $(\overrightarrow{BG})$ в п.2.1) утверждает, что слабое оснащение согласовано с двойственностью, отделимой по $\vec{F}$.

Мы покажем, что естественным образом обобщенный классический критерий согласованности Макки–Аренса остается достаточным условием для двойственности любых индуктивных шкал, и необходимым условием – если шкала $\vec{E}$ линейна.

3.2. Теорема Макки–Аренса для шкал пространств. *Пусть* $<\vec{E},\vec{F}>$ *– двойственность, отделимая по* $\vec{F}$, $r(\vec{E},\vec{F})$ *– дуальное оснащение шкалы* $\vec{E}$. *Тогда:*

(1). Если выполнено обобщенное условие Макки–Аренса: $s(\vec{E},\vec{F}) \le r(\vec{E},\vec{F}) \le t(\vec{E},\vec{F})$; *(т.е.* $s(E_i,F^j) \le r(E_i,F^j) \le t(E_i,F^j)$, $i \in I$, $j \in J$ *), то оснащение* $r(\vec{E},\vec{F})$ *согласовано с двойственностью* $<\vec{E},\vec{F}>$.

(2). Обратно, если $\vec{E}$ *– линейная шкала, и оснащение* $r(\vec{E},\vec{F})$ *согласовано с двойственностью, то выполнено условие* $(\overrightarrow{MA})$. *В этом случае условие* $(\overrightarrow{MA})$ *является необходимым и достаточным для согласованности оснащения с двойственностью.*

Доказательство. 1). Пусть условие $(\overrightarrow{MA})$ выполнено, $\vec{j} = \{j_i\}_{i \in I} \in E^{*r}$, $r \in R$. Из условия $(\overrightarrow{MA})$ следует, что $j_i =<\cdot, f^{r(i)}>$, где $f^{r(i)} \in F^{r(i)}$, $i \in I$. Далее, из равенств $<\cdot, f^{r(i_1)}>=<\cdot, f^{r(i_2)}>$ на E_{i_1} при $i_1 \le i_2$ и отделимости по $\vec{F}$ следует $r(i) \equiv j$, откуда $\vec{j} =<\cdot, f^j>$, $f^j \in F^j$.

Обратно, из левого неравенства в $(\overrightarrow{MA})$ и обобщенной теоремы Банаха–Гротендика $(\overrightarrow{BG})$ (см. п.2.1) следует, что всякий элемент $f^j \in F^j$ определяет функциональную шкалу $\vec{j} =<\cdot, f^j>\in E^{*j}$. Таким образом, $\vec{E}^*_r = \vec{E}^*_s \cong \vec{F}$.

2). Обратно, пусть выполнено условие $(\vec{M})$ и шкала $\vec{E}$ *линейна*. По следствию из обобщенной теоремы Хана–Банаха (см. [3],[4]), любой $j_i \in (E_i, r(E_i,F^j))^*$ может быть продолжен до функциональной шкалы на $\vec{E}^*$, которая, по условию, имеет вид $\vec{j} =<\cdot, f^j>$, $f^j \in F^j$. Следовательно, топология $r(E_i,F^j)$ согласована с двойственностью

$< E_i, F^j >$, откуда по классической теореме Макки–Аренса $s\,(E_i, F^j) \le r(E_i, F^j) \le t\,(E_i, F^j)$, т.е. выполнено условие $(\overrightarrow{MA})$.

В заключение отметим, что примеры нелинейных индуктивных шкал ЛВП с нулевым сопряженным (см. [8], [9]) показывают, что условие $(\overrightarrow{MA})$ не распространяется, вообще говоря, на нелинейные шкалы.

Список использованной литературы

1. Эдвардс Р. Функциональный анализ.Теория и приложения. – М.:Мир,1969.– 1072с.
2. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Наука, 1994. – 336 с.
3. Орлов И.В. Теорема Хана–Банаха в индуктивных шкалах пространств //Доповіді НАН України. 1997. – Вып.9. С.32–36.
4. Orlov I.V. Hahn–Banach theorem in linear and nonlinear scales of the topological vector spaces //Spectral and Evolutionary Problems. – V.7. – 1997. – P.27–31.
5. Orlov I.V. Banach–Grothendieck theorem for the scales of spaces //Spectral and Evolutionary Problems. – V.10. – 2000. P.35–39.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 359 с.
7. Orlov I.V. A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces //Operator Theory: Advances & Appl. – V.118. – 2000. – P.321–333.
8. Orlov I.V. The space of measurable functions with almost everywhere convergence is a nonlinear scale of the locally convex spaces //Spectral and Evolutionary Problems. – V.8. – 1998. – P. 37–42.
9. Орлов И.В. Сходимость почти всюду как сходимость в нелинейной индуктивной шкале локально выпуклых пространств //Ученые записки ТНУ. Математика. Физика. – 2001– (в печати).

Поступила в редколлегию 17.09.2000