УДК 619.8

О.А.ЩЕРБИНА, канд.физ.-мат. наук, Н.Н.КАНАЕВА., канд.физ.-мат. наук
Крымская академия природоохранного и курортного строительства

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СУММ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассматриваются экстремальные задачи для сумм биномиальных коэффициентов, возникающие при исследовании оценок вычислительной сложности алгоритмов дискретной оптимизации. Полученные экстремальные задачи решаются с помощью теории мажоризации и приведены полезные неравенства для сумм биномиальных коэффициентов

При исследовании оценки вычислительной сложности (ОВС) локального алгоритма решения задач дискретного программирования возникают задачи определения нижней и верхней оценки перебора числа допустимых решений [1]. Решение таких задач связано с определением экстремальных значений сумм биномиальных коэффициентов следующего вида:

Минимизировать или максимизировать в положительных целых числах выражение

$$f\left(x_1,\dots, x_N\right)\to extr \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\sum_p x_p = n, \tag{2}$$

$$x_p \ge 1, x_p \in Z^+, \quad p = 1,\dots,N \tag{3}$$

В качестве максимизируемых и минимизируемых в (1) функций будем рассматривать следующие:

$$\text{A. } \mathrm{f1}\left(x_1, x_2,\dots, x_N\right)=\prod_{p=1}^{N}\sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q},$$

$$\text{B. } \mathrm{f2}\left(x_1, x_2,\dots, x_N\right)=\sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q}\right)^{L},$$

$$\text{C. } \mathrm{f3}\left(x_1, x_2,\dots, x_N\right)=\sum_{p=0}^{N}\ \sum_{q=0}^{n} C_{x_p+1}^{q}.$$

Как правило, в рассматриваемых в [1] задачах оптимизации требуется, чтобы целочисленное решение удовлетворяло специальному условию, которое позволяет применить методы теории мажоризации функций [2], заданных на множестве целочисленных векторов.

Предварительно рассмотрим необходимые для дальнейшего рассмотрения определения и теоремы, касающиеся теории мажоризации на множестве целых чисел.

Определение 1. Пусть $x, y \in R^n$. Говорят, что x мажорируется y [2] (или y мажорирует x), и пишут $x \ \mathbf{p}\ y$, если

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \le \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \quad k = 1,\dots,n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Запись $x_{[i]}$ означает, что компоненты вектора x упорядочены по невозрастанию.

Наибольший и наименьший векторы обозначают u и v: $u \ \mathbf{p}\ x \ \mathbf{p}\ v$.

Определение 2. [2]. Вещественная функция j, определенная на множестве $A \subset R^n$,называется *вогнутой по Шуру* (S-*вогнутой*) на A, если

$$x \ \mathbf{p}\ y \quad на \quad A \Rightarrow j(x) \ge j(y). \tag{4}$$

Аналогично, вещественная функция j, называется *выпуклой по Шуру* (S-*выпуклой*) на A, если

$$x \ \mathbf{p}\ y \quad на \quad A \Rightarrow j(x) \le j(y). \tag{5}$$

Утверждение 1 [2]**.** *Если множество* $B = \left\{ x: \quad x \in A \quad и \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = n \right\}$ *не пусто, то его наименьший элемент* $u = (n, n, \dots, n)/N$ ***;*** *и, если существует наибольший элемент* v *, то*

$$v = (m, m, \dots, n - (N-1)m), \quad где \ \ \mathrm{m} = \min_i x_i.$$

Это означает, что для любого x из B справедливо: $u \ \mathbf{p}\ x \ \mathbf{p}\ v$.

Из утверждения 1 следует, что наибольший вектор при $1 \le x_i \le n-1$ (в этом случае m=1) равен $v = (1, 1, \dots, 1, n - N + 1)$.

Таким образом, справедливо

Следствие 1.

$$(\mathrm{n}, \mathrm{n}, \dots, \mathrm{n})/\mathrm{N} \ \mathbf{p}\ \mathrm{x} \ \mathbf{p}\ (1, \dots, 1, \mathrm{n} - \mathrm{N} + 1).$$

Понятие мажорируемости тесно связано с Т-преобразованием векторов (трансфертом) [2], которое оставляет прежними все компоненты вектора, кроме двух, а эти две компоненты заменяются их средневзвешенными.

Среди Т-преобразований рассмотрим так называемую операцию “перераспределения” векторов

$$T_i^j\left(x_1, x_2,\dots, x_i,\dots, x_j,\dots, x_n\right)=\left(x_1, x_2,\dots, x_i-1,\dots, x_j+1,\dots, x_n\right).$$

Предварительно рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1. *Функция* f1– S-*вогнутая; функция* f2– S-*выпуклая; функция* f3– S-*выпуклая.*

Доказательство. Функции симметрические. Для доказательства S-вогнутости некоторой функции f необходимо убедиться в выполнении неравенства

$$f(x_1+1, x_2)-f(x_1, x_2+1)\le 0 \tag{6}$$

при $x_1 \ge x_2$.

В случае S-выпуклой функции неравенство (6) должно быть противоположным.

1) Докажем S-вогнутость функции f1. Покажем, что $\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+1}^q \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q - \sum_{q=0}^{n} C_{x_1}^q \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+1}^q \le 0$ при $x_1 \ge x_2$.

Положим для определенности $x_1 = x_2 + a,\ a \in Z^+$. Рассмотрим разность

$$\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a+1}^q \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q - \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+1}^q = \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q + \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^{q-1}\right)\sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q -$$

$$-\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q + \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^{q-1}\right) = \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^{q-1} \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q - \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^{q-1} =$$

$$=\left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q - C_{x_2+a}^n\right)\sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q - \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q - C_{x_2}^n\right) =$$

$$=\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+a}^q C_{x_2}^n - C_{x_2+a}^n \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q =$$

$$=\sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q \left(\frac{1}{1-q/(1+x_2)} \frac{1}{1-q/(2+x_2)} \cdots \frac{1}{1-q/(a+x_2)}\right) C_{x_2}^n -$$

$$-C_{x_2}^n \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q \left(\frac{1}{1-n/(1+x_2)} \cdot \frac{1}{1-n/(2+x_2)} \cdots \frac{1}{1-n/(a+x_2)}\right) =$$

$$= C_{x_2}^n \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q \left(\left(\frac{1}{1-q/(1+x_2)} \frac{1}{1-q/(2+x_2)} \cdots \frac{1}{1-q/(a+x_2)} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{1-n/(1+x_2)} \cdot \frac{1}{1-n/(2+x_2)} \cdots \frac{1}{1-n/(a+x_2)} \right) \right) \le 0, \text{ т.к. } q \le v.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$C_{n+k}^m = C_n^m \left(\frac{1}{1-m/(1+n)} \cdot \frac{1}{1-m/(2+n)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-m/(k+n)} \right)$$

2) *Функция* f2 – S-*выпуклая*.

Для доказательства достаточно убедиться в том, что $\left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+1}^q\right)^L + \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q\right)^L - \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_1}^q\right)^L - \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+1}^q\right)^L \ge 0$ при $x_1 \ge x_2$. Нетрудно показать справедливость данного неравенства, применяя формулу бинома Ньютона.

3) *Функция* f3 – S-*выпуклая*.

Применяя преобразование $T_1^2(x_1, x_2)$ и тождество $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, можно показать, что

$$\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+2}^q + \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+1}^q - \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+1}^q + \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+2}^q \right) \ge 0 \quad \text{при} \quad x_1 \ge x_2.$$

Лемма доказана.

Тогда, с учетом того, что существуют наименьший и наибольший векторы u и v для двухкомпонентного вектора

$X = (x_1, x_2)$: $u = (x_1 + x_2)/2$, $v = (x_1 + x_2 - 1{,}1)$.

Тогда , из соотношения

$$((x_1 + x_2)/2, (x_1 + x_2)/2) \prec (x_1, x_2) \prec (x_1 + x_2 - 1{,}1)$$

и из S-вогнутости функции f1, выпуклости функций f2 ,f3 следует выполнение следующих неравенств:

$$\text{AI-AII.} \quad 2\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+x_2-1}^q \le \sum_{q=0}^{n} C_{x_1}^q \sum_{q=0}^{n} C_{x_2}^q \le \left(\sum_{q=0}^{n} C_{(x_1+x_2)/2}^q \right)^2.$$

$$\text{BI-BII.} \quad \left(\sum_{q=0}^{n} C_{(x_1+x_2)/2}^q \right)^L \le \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+1}^q \right)^L + \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_2+1}^q \right)^L \le 4^L + \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_1+x_2}^q \right)^L$$

$$\text{CI.-CII.} \quad 2\sum_{q=0}^{n} C_{(x_1+x_2)/2}^q \le \sum_{q=0}^{n} C_{x_2+1}^q + \sum_{q=0}^{n} C_{x_1+1}^q \le 4 + \sum_{q=0}^{n} C_{x_1+x_2}^q;$$

Заметим, что в теории мажоризации доказательство может быть проведено для случая двухкомпонентных векторов и затем обобщено для N- компонентных векторов.

В этом случае наименьший и наибольший целочисленные векторы u и v имеют вид

$$R = \sum_{p=1}^{N} x_p - N\left[\sum_{p=1}^{N} x_p / N\right],\ v = \left(\sum_{p=1}^{N} x_p \quad - N + 1, 1, \ldots, 1\right)$$

и справедливы следующие неравенства.

$$\text{AIII.}\ \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \geq 2^{N-1} \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\sum\limits_{k=1}^{N} x_p - N + 1};$$

$$\text{AIV.}\ \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \leq \left(\sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\sum\limits_{p=1}^{N} x_p / N\right]}\right)^{N-R} \left(\sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\sum\limits_{p=1}^{N} x_p / N\right]+1}\right)^{R},$$

$$\text{BIII.} \sum_{p=1}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_p+1}^{q}\right)^{L} \leq 4^{L}(N-1) + \left(\sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\sum\limits_{p=1}^{N} x_p - N + 2}\right)^{L};$$

$$\text{BIV.} \sum_{p=1}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q}\right)^{L} \geq (N-R)\left(\sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\sum\limits_{k=1}^{N} x_p / N\right]}\right)^{L} + R\left(\sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\sum\limits_{k=1}^{N} x_p / N\right]+1}\right)^{L};$$

$$\text{CIII.} \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p+1}^{q} \leq 4(N-1) + \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\sum\limits_{p=1}^{N} x_p - N + 2};$$

$$\text{CIV.}\ \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \geq (N-R) \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\sum\limits_{k=1}^{N} x_p / N\right]} + R \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\sum\limits_{k=1}^{N} x_p / N\right]+1}.$$

Из S- вогнутости функции f1, выпуклости f2, f3 и существования наибольшего вектора для векторов $\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} = (x_1 + a_1, \ldots, x_p + a_p, \ldots, x_N + a_N)$ (если $\mathbf{v}$ – наибольший вектор для $\mathbf{x}$, а $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, то наибольший вектор для $\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}$ имеет вид $\mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha}$) следует выполнение следующих неравенств:

$$\text{AV.} \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p + a_p}^{q} \geq \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p^*}}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} C_{1+a_p}^{q}\right) \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\sum\limits_{p=1}^{N} x_p - N + 1 + a^*_{p^*}},$$

$$a^*_{p^*} = \max_p \{a_p\}.$$

$$\text{BV.}\sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}C_{x_p+a_p}^{q}\right)^{L}\le\sum_{\substack{p=1\\ p\ne p^*}}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}C_{1+a_p}^{q}\right)^{L}+\left(\sum_{q=0}^{n}C_{\sum_{p=1}^{N}x_p-N+1+a_{p^*}^{*}}^{q}\right)^{L};$$

$$\text{CV. }\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=0}^{n}C_{x_p+a_p}^{q}\le\sum_{\substack{p=1\\ p\ne p^*}}^{N}\sum_{q=0}^{n}C_{1+a_p}^{q}+\sum_{q=0}^{n}C_{\sum_{p=1}^{N}x_p-N+1+a_{p^*}^{*}}^{q}.$$

Если u –наименьший вектор для x и все компоненты $\boldsymbol{\alpha}$ одинаковы, то существует и наименьший вектор для $\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha}$ равный $u+\boldsymbol{\alpha}$.

Тогда справедливы также следующие неравенства:

$$\text{AVI.}\prod_{p=1}^{N}\sum_{q=0}^{n}C_{x_p+a}^{q}\le\left(\sum_{q=0}^{n}C_{a+\left[\sum_{k=1}^{N}x_p/N\right]}^{q}\right)^{N-R}\left(\sum_{q=0}^{n}C_{a+\left[\sum_{k=1}^{N}x_p/N\right]+1}^{q}\right)^{R},$$

$$\text{BVI.}\sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}C_{x_p+a}^{q}\right)^{L}\ge(N-R)\left(\sum_{q=0}^{n}C_{\left[\sum_{k=1}^{N}x_p/N\right]+a}^{q}\right)^{L}+$$

$$+R\left(\sum_{q=0}^{n}C_{\left[\sum_{k=1}^{N}x_p/N\right]+a+1}^{q}\right),$$

$$\text{CVI.}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=0}^{n}C_{x_p+a}^{q}\ge(N-R)\sum_{q=0}^{n}C_{\left[\sum_{k=1}^{N}x_p/N\right]+a}^{q}+R\sum_{q=0}^{n}C_{\left[\sum_{k=1}^{N}x_p/N\right]+a+1}^{q},$$

причем $R=\sum_{p=1}^{N}x_p-N\left[\sum_{p=1}^{N}x_p/N\right].$

Список использованной литературы

1. Канаева Н.Н. Исследование оценок эффективности локального алгоритма декомпозиции задач дискретной оптимизации // Динамические системы. – Симферополь: КФТ, 1999.– Вып.15.– С. 187–193.
2. Маршалл А.Б., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения –М.: Мир,1983.–576 с.

Поступила в редколлегию 20.03.2000