

## МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 532.59

И. Т. СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, Л. В. МОРОЗОВА, инж.,  
Ин-т гидромех. НАН Украины

### ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ВОЛН НЕСИММЕТРИЧНО НЕОДНОРОДНЫМ ЦИЛИНДРОМ

Получен новый класс точных решений задачи дифракции волн на несимметрично неоднородном цилиндрическом рассеивателе, свойства которого зависят от двух координат - радиальной и дуговой .

**1.Введение.** В настоящее время известно мало точных решений задач рассеяния волн на локальных прозрачных неоднородностях, и они относятся прежде всего к радиально симметричным неоднородностям с квадратичным законом изменения свойств рассеивателя [1]. Основные трудности связаны с необходимостью построения решений дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Обстоятельный обзор такого рода исследований приведен в [1,2]. Здесь отметим только некоторые работы. В [3] получены два класса новых точных аналитических решений в замкнутой форме. В [4–6] исследуется дифракция электромагнитных волн на радиально неоднородном плазменном цилиндре. В [7,8] рассматриваются задачи для скалярного волнового поля. По-видимому, наибольшее число исследований относится к плазменным неоднородностям в связи с необходимостью диагностики распределения плотности электронов по радиальной координате при удержании плазмы. В [1] охарактеризованы также основные подходы, получившие широкое распространение при исследовании дифракции волн на неоднородностях, такие как асимптотические борновские приближения [9,10], метод рядов Бремена [11], метод степенных рядов [1].

Точные аналитические решения в виде сходящихся степенных рядов для радиально неоднородных рассеивателей были построены для ряда моделей неоднородных сред [12]: электромагнитного поля, гидродинамической среды, мелкой воды, мембраны, изгибно-деформируемой пластины. Трудности построения новых точных ре

шений в случае несимметричных неоднородностей существенно возрастают.

**2. Постановка задачи.** В данной статье получен новый класс точных решений задачи дифракции гидродинамических волн на прозрачном рассеивателе типа неоднородного цилиндра в случае зависимости плотности от двух координат: радиальной  $r$  и дуговой  $q$ .

Предполагается, что на неоднородный цилиндр радиуса  $r = r_0$  набегают из бесконечности монохроматические волны давления в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. С цилиндром связана

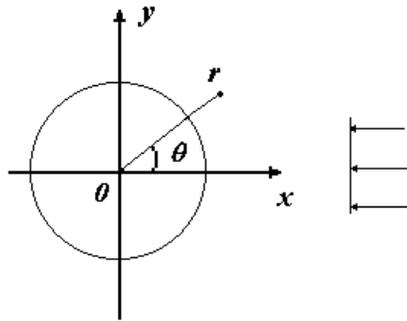


Рис. 1

прямоугольная декартова система координат  $(x, y, z)$  и цилиндрическая  $(r, q, z)$  (Рис.1). Задача сводится к определению рассеянного поля давления  $p_s$  во внешней области  $\Omega^e$ , заполненной однородной средой с плотностью  $r_0$ , и поля давления  $p$  во внутренней области  $\Omega$ , заполненной не-

однородной средой с плотностью  $\rho(r, \theta)$ .

Математическая постановка задачи включает уравнение Гельмгольца во внешней области

$$\frac{\mathbb{J}^2 p_2}{\mathbb{J}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathbb{J}p_2}{\mathbb{J}r} + \frac{1}{r^2} \frac{\mathbb{J}^2 p_2}{\mathbb{J}q^2} + k_2^2 p_2 = 0 \quad \text{в } \Omega^e, \quad (1)$$

уравнение Гельмгольца с переменными коэффициентами во внутренней области

$$\frac{\mathbb{J}^2 p}{\mathbb{J}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathbb{J}p}{\mathbb{J}r} - \frac{1}{r(r, q)} \frac{\mathbb{J}r(r, q)}{\mathbb{J}r} \frac{\mathbb{J}p}{\mathbb{J}r} + \frac{1}{r^2} \frac{\mathbb{J}^2 p}{\mathbb{J}q^2} - \frac{1}{r(r, q)r^2} \frac{\mathbb{J}r(r, q)}{\mathbb{J}q} \frac{\mathbb{J}p}{\mathbb{J}q} + k_0^2(r) p_2 = 0, \quad \text{в } \Omega \quad (2)$$

условия сопряжения

$$p|_{r=1} = p_2|_{r=1}, \quad \frac{1}{r_0(r, q)} \frac{\mathbb{J}p}{\mathbb{J}r} \Big|_{r=1} = \frac{\mathbb{J}p_2}{\mathbb{J}r} \Big|_{r=1}, \quad (3)$$

условия регулярности для  $p$

$$p = 0 \text{ при } r = 0, \quad (4)$$

условия излучения Зоммерфельда для  $p_s$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\mathcal{I} p_s}{\mathcal{I} r} - i k_2 p_s \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p_s = 0, \quad (5)$$

выражение для падающей волны

$$p_i = p_{0i} e^{i(k_2 r \cos q + wt)}. \quad (6)$$

В (1)–(6) приняты обозначения:  $t$  – время,  $p_{0i}$  – амплитудное значение давления в набегающей волне,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k_2$  и  $k_0(r)$  – волновые числа,  $w$  – круговая частота,  $w = k_2 c_0$ ,  $c_0$  – скорость распространения акустических волн,  $r_0$  – радиус цилиндра;  $p_2$  – давление во внешнем дифрагированном поле, равное сумме давлений падающего  $p_i$  и рассеянного  $p_s$  полей,  $p_2 = p_i + p_s$ . Условия сопряжения (3) выражают равенство давлений и скоростей на поверхности раздела неоднородной и однородной сред.

Всюду введены безразмерные величины со звездочками, которые опускаются:

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad r_0^* = \frac{r_0}{r_{02}}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad k_2^* = k_2 r_0 = \frac{w}{c_0} r_0, \quad k_0^*(r) = k_0(r) r_0 = \frac{w}{c_0(r)} r_0.$$

В дальнейшем скорость звука  $c_0(r)$  и, следовательно, волновое число  $k_0(r)$  в уравнении (2) принимаются постоянными, что, как известно, это с большой точностью справедливо для такого рода задач [12].

**3. Построение решений.** Разделяя переменные в уравнении (1), приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ}{dr} + \left( k_2^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) Q &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{d\theta^2} + m^2 Y &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Разделяя переменные в уравнении (2), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r_r(r)} \frac{dr_r(r)}{dr} \frac{dR}{dr} + \left( k_0^2(r) - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0, \\ \frac{d^2 T}{dq^2} - \frac{1}{r_q(q)} \frac{dr_q(q)}{dq} \frac{dT}{dq} + m^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу периодичности по  $q$  суммарного поля величина  $m$  в (7) принимает целочисленные значения.

Решение первого уравнения системы (7) записывается в цилиндрических функциях

$$Q_m = C_m H_m^{(1)}(k_2 r) + D_m H_m^{(2)}(k_2 r), \quad (9)$$

где  $H_m^{(1)}(k_2 r)$  и  $H_m^{(2)}(k_2 r)$  – функции Ханкеля первого и второго рода, соответственно. В соответствии с принципом излучения искомое поле должно иметь характер волн, распространяющихся в бесконечность по радиальным направлениям. Из асимптотических представлений для функций Ханкеля при больших значениях аргумента  $|z| \gg 1$  [13] следует, что слагаемое  $D_m H_m^{(2)}(k_2 r)$  в решении (9) при  $r \rightarrow \infty$  соответствует волне, распространяющейся от источника и условия излучения (5) удовлетворяются, если положить  $C_m = 0$ .

Решение второго уравнения системы (7) записывается в виде

$$Y_m = A_m \cos m q + B_m \sin m q \quad (10)$$

В силу четности поля падающей волны относительно  $q = 0$  полагаем  $B_m = 0$ . В результате общее решение уравнения (1) представляется в виде бесконечного ряда

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_m H_m^{(2)}(k_2 r) \cos m q \quad (11)$$

с неизвестными коэффициентами  $a_m$ .

Уравнения системы (8), описывающие поле во внутренней области, не допускают построения точных решений при произвольных функциях  $r_r(r)$ ,  $r_q(q)$ . В дальнейшем рассматривается случай изменения плотности по закону

$$r(r, q) = e^{a r_0(1-r)} \sin^2 J. \quad (12)$$

Система уравнений (8) с учетом (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + a r_0 \right) \frac{dR}{dr} + \left( k_0^2(r) - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0, \\ \frac{d^2 T}{dq^2} - 2 \operatorname{ctg} q \frac{dT}{dq} + m^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Первое уравнение системы (8) имеет решение [14]

$$R_m(r) = r^m \exp\left(-\left(ar_0 + \sqrt{(ar_0)^2 - 4k_0^2(r)}\right)r/2\right) \left(\sqrt{(ar_0)^2 - 4k_0^2(r)}\right)^{1/2+m} \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m + \frac{ar_0}{2\sqrt{(ar_0)^2 - 4k_0^2(r)}}, 2m + 1, \sqrt{(ar_0)^2 - 4k_0^2(r)}r\right), \quad (14)$$

где  ${}_1F_1(a, b, c)$  – вырожденная гипергеометрическая функция.

Второе уравнение системы (13) после замены  $T(q) = h(x), x = q + P/2$  приводится к виду

$$h'' + 2h'tg x + m^2 h = 0. \quad (15)$$

Это уравнение имеет решение

$$h = \cos^3 x \left( \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} v \right] \right), \quad (16)$$

где  $v$  пробегает решения уравнения  $v'' + m^2 + 1 = 0$ , т.е.

$$v = C_1 \cos(x\sqrt{m^2 + 1}) + C_2 \sin(x\sqrt{m^2 + 1}), \quad m^2 + 1 \neq 0$$

Следовательно,

$$h(x) = \sin x \left( -C_1 \sqrt{m^2 + 1} \sin(x\sqrt{m^2 + 1}) + C_2 \sqrt{m^2 + 1} \cos(x\sqrt{m^2 + 1}) \right) + \\ + \cos x \left( -C_1 (m^2 + 1) \cos(x\sqrt{m^2 + 1}) - C_2 (m^2 + 1) \sin(x\sqrt{m^2 + 1}) \right), \quad (17)$$

$$T(\theta) = \cos \theta \left( -C_1 \sqrt{m^2 + 1} \sin\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{m^2 + 1}\right) + C_2 \sqrt{m^2 + 1} \times \right. \\ \left. \times \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{m^2 + 1}\right) \right) + \sin \theta \left( -C_1 (m^2 + 1) \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{m^2 + 1}\right) - \right. \\ \left. - C_2 (m^2 + 1) \sin\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{m^2 + 1}\right) \right). \quad (18)$$

Разлагая (18) в ряд Фурье по системе тригонометрических функций  $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x \dots$  и учитывая, что в силу четности падающей волны коэффициент при  $\sin m q$  должен быть равен нулю, приходим к выражению  $T_m(q) = b_m \cos m q$ , где  $b_m$  – неизвестные коэффициенты. Таким образом, общее решение системы уравнений (13) можно записать в виде

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} b_m R_m(r) \cos m q, \quad (19)$$

Давление в плоской падающей волне представим в виде разложения по цилиндрическим функциям

$$p_i = \sum_{m=0}^{\infty} e_m i^m J_m(k_2 r) \cos m q, \quad (20)$$

где  $e_m$  – множитель Неймана,  $e_m = \begin{cases} 1, m = 0, \\ 2, m \geq 1. \end{cases}$

Подставляя решения (11) и (19), а также выражение (20) в условия сопряжения (3), получаем выражения для коэффициентов

$$a_0 = -\frac{J_0(k_2) + J_0'(k_2)}{H_0^{(2)}(k_2) + H_0^{(2)'}(k_2)}, \quad (21)$$

$$a_m = \frac{\varepsilon_m i^m [k_2 \rho_0 J_m'(k_2) R_m(1) - J_m(k_2) R_m'(1)]}{[H_m^{(2)}(k_2) R_m'(m) - k_2 \rho_0 H_m^{(2)'}(k_2) R_m(1)]}, \quad m \geq 1, \quad (22)$$

$$b_m = \frac{\varepsilon_m i^m k_2 \rho_0 [H_m^{(2)'}(k_2) J_m(k_2) - H_m^{(2)}(k_2) J_m'(k_2)]}{[H_m^{(2)}(k_2) R_m'(m) - k_2 \rho_0 H_m^{(2)'}(k_2) R_m(1)]}, \quad m \geq 1. \quad (23)$$

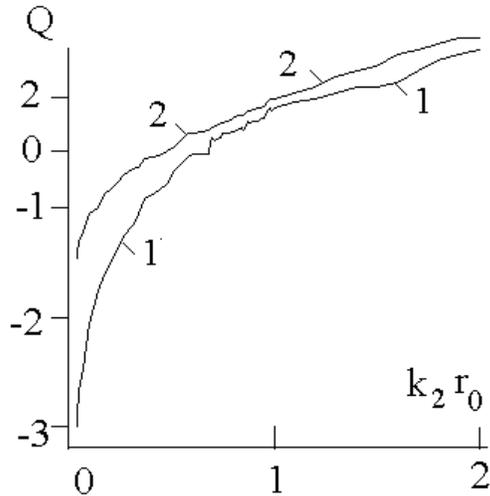


Рис. 2 а

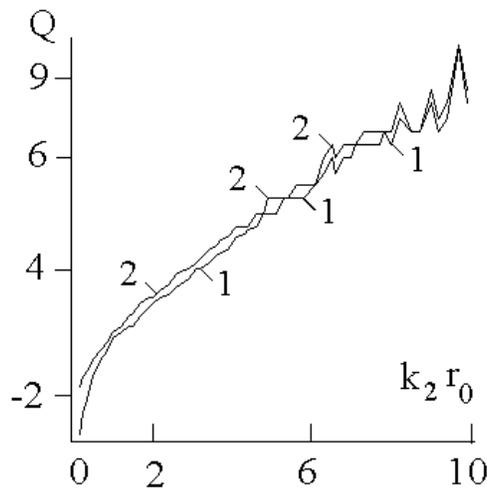


Рис. 2 б

**4. Численные расчеты и анализ результатов.** На основе полученных решений (11), (19) и выражений для коэффициентов (21)–(23) проведены расчеты полной рассеянной мощности, которая обычно характеризуется полным поперечным сечением рассеяния

$$Q = \int_0^{2p} |f(r, q)|^2 dq,$$

где  $f(r, q)$  – фактор углового распределения рассеянного излучения в направлении  $q$ .

С целью оценки влияния несимметричной неоднородности на рассеяние волн проведено сравнение полного поперечного сечения рассеяния  $Q$  для симметричного и несимметричного распределений плотности, вычисленного с коэффициентом  $ar_0 = \ln 5$  в формуле (12). На рис. 2а и рис. 2б приведены результаты расчетов величины  $Q$  как функции волнового числа  $k_2 r_0$ , графики построены в логарифмическом масштабе по оси ординат с применением пакета Maple V Release 4 для IBM PC. Индекс 1 соответствует симметричной неоднородности, индекс 2 – несимметричной неоднородности. На рис. 2а и рис. 2б представлены результаты расчетов в диапазоне волновых чисел  $k_2 r_0 \in [0, 2]$  и  $k_2 r_0 \in [0, 10]$  соответственно, верхние значения которых соответствуют длинам волн  $\frac{\lambda}{2r_0} \cong 1.5$  и  $\frac{\lambda}{2r_0} \cong 0.3$ . Из приведен-

ных графиков, следует, что (1) для симметричного и несимметричного распределения плотности характерно наличие локальных резонансных эффектов; (2) в рассматриваемом диапазоне изменения волновых чисел для несимметричного распределения плотности наблюдается увеличение рассеянной энергии (кривая 2); (3) влияние дуговой координаты  $q$  на распределение плотности проявляется только при малых частотах.

#### Список использованной литературы.

1. Selezov I. T. Diffraction of waves by radially inhomogeneous inclusions // Physical Express. – 1993. – 1, N 2. – P. 101–115.
2. Selezov I. T. Propagation and diffraction of waves in locally inhomogeneous and bound structures // Int. J. of Fluid Mech. Research – 1996. – 23, № 1 & 2 – P. 81–95.
3. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Некоторые задачи дифракции плоских волн на цилиндре с переменной плотностью // Акуст. ж. – 1977. – 23, N5.– с. 805–809.
4. Fejer J. A. Scattering of electromagnetic waves by a plasma cylinder // Phys. Fluids. – 1964. – Vol. 7, N 3. – P. 439–445.
5. Nozaka M., Takaku K. Scattering of electromagnetic waves by a cylindrically inhomogeneous plasma // J. Phys. Soc. Jap. – 1968. – 24, N 1. – P. 172–184.
6. Parkinson R. G., Kharadly M. M. Z. Experimental study of scattering of electromagnetic waves by radially inhomogeneous cylinder // Can. J. Phys. – 1971.– 49, N 23. – P. 2989–2996.
7. Karlsson A., Kristensson G. Wave splitting in the time domain for a radially symmetric geometry // Wave Motion. – 1990.– Vol. 12, N 3. – P. 197–211.
8. Sleeman B. D. Acoustic scattering by inhomogeneous media // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1980. – 33, N 4. – P. 373–383.
9. Born M. Optic. – Berlin, Springer. – 1933. – 318 pp.

10. Morse F. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. – New York, McGraw-Hill Inc. – 1953. – Vol. 1 and 2. – 930 and 880 pp.
11. Vissers F. P. L. M., Kamp L. P. J., Sluijter F. W. Some generalizations of radial Bremmers series // Wave Motion. – 1991. – 13, N1. – P. 43–51.
12. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях. – К.: Наук. думка, 1978. – 146 с.
13. Кратцер А., Франц Б. Трансцендентные функции. – М.: Издат. иностр. лит., 1963. – 468 с.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ГИФ МЛ, 1961. – 704 с.

Поступила в редколлегию 12.01.2000