УДК 519.86: 513.19

А.Ю. ПОЗДНЯКОВА, асп., Л.Н. СЕРГЕЕВА, канд. физ.-мат. наук,
Запорожский гос.ун-т

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО ТЕСТА ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДЖОКЕРОМ

Предложен метод анализа динамических систем с джокером, позволяющий по ряду наблюдений за одной переменной системы определить наличие джокера и его тип. Для систем с джокером исследована возможность получения таких числовых характеристик, как оценка фрактальной размерности, показатели Ляпунова и др. Вычислена оценка корреляционной размерности для отображения Хенона с интервальным джокером.

1. Определение динамических систем с джокером. В последнее время для моделирования поведения сложных систем предложен новый класс моделей – динамические системы с джокером [1–3]. Фазовое пространство такой системы состоит из двух областей – области G, поведение в которой определяется отображением $x_n = f(x_{n-1})$ (переменная x может представлять собой вектор) и области J – области джокера, при этом задано правило, по которому система из точки $x_{n-1} \in J$ попадает в точку x_n. В зависимости от размерности области J и заданного правила джокеры можно классифицировать как одномерные и k-мерные (k меньше или равно размерности фазового пространства) и как точечные и интервальные.

Введение джокера в динамическую систему существенно меняет ее поведение и, как следствие, числовые характеристики, такие как фрактальная размерность, максимальный показатель Ляпунова, энтропия Колмогорова и др.

В процессе применения методов теории детерминированного хаоса к анализу поведения сложных систем, в частности экономических, исследователю доступна информация о поведении системы в виде временного ряда (как правило одномерного). Для того чтобы определить, является ли исследуемая система нелинейной детерминированной системой, фазовое пространство которой содержит странный аттрактор, по значениям временного ряда вычисляются оценки фрактальной размерности, максимального показателя Ляпунова и другие. Если в системе присутствует джокер, то применение стандартных алгоритмов получения этих оценок приведет к ошибочным результатам. Таким образом вопрос о разработке тестов, позволяющих обнаружить присутствие джокера в системе по экспериментальным данным, становится чрезвычайно актуальным [3].

Попытки ответить на этот вопрос, предпринятые в [2], носят характер отрицательных результатов: выдвинута гипотеза, что в системах с джокером невозможна реконструкция аттрактора, что по экспериментальным данным невозможно получить количественные оценки таких характеристик, как размерность Хаусдорфа-Безиковича, максимальный показатель Ляпунова и другие. Предлагается рассматривать ряд косвенных признаков присутствия джокера в системе, такие как неправильная последовательность циклов при увеличении параметра, наличие разрывов в отображении, перемежаемость и влияние начальных данных. К сожалению, все эти признаки (кроме разрывов в отображении), можно обнаружить только в случае, если возможны активные эксперименты над системой. В большинстве экономических, социальных и исторических систем такие эксперименты невозможны. Разрывы в отображении можно обнаружить, построив по данным временного ряда последовательность псевдофазовых пространств возрастающей размерности.

2. Графический тест хаоса. Авторы предлагают использовать для анализа присутствия джокера в системе графический тест хаоса, впервые изложенный в [4]. Суть этого метода состоит в том, что он выявляет неустойчивые периодические орбиты, заключенные в странном аттракторе. Исходным объектом для выполнения теста является временной ряд $\{x_i\}$. Если какое-то наблюдение x_i окажется возле периодической орбиты, то следующие наблюдения будут продвигаться вдоль этой орбиты в течении некоторого времени, пока не удалятся от нее. Если наблюдения продвигаются вдоль орбиты значительное время, то они вернутся в окрестность точки x_i через некоторый интервал времени T, где T указывает длину орбиты. Это означает, что расстояние $|x_i - x_{i+T}|$ будет малым. Далее x_{i+1} будет возле x_{i+1+T}, x_{i+2} будет возле x_{i+2+T} и так далее. Таким образом имеет смысл поискать серии последовательных данных, для которых $|x_i - x_{i+T}|$ мало.

Для того, чтобы обнаружить эти области "тесного возврата" в множестве данных нужно построить специальным образом раскрашенный график. Вычисляются все разности $|x_i - x_{i+t}|$. Если разность меньше, чем e, то это обозначается черным, если больше, чем e, то обозначается белым. По горизонтальной оси откладывается номер наблюдения i, где $i = (1,2,..., N)$, а вертикальная ось обозначается через t, где $t = (1,2,..., N - i)$. На наличие тесного возврата в данных указывают горизонтальные отрезки прямых. В то время как, если множество данных стохастично, возникнет область равномерно распределенных черных точек.

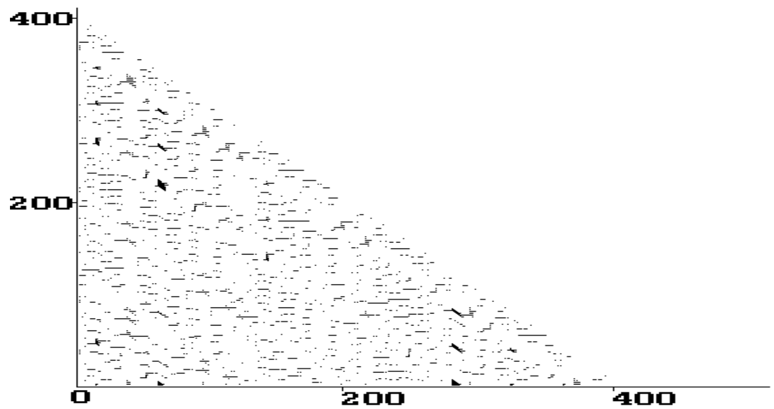


Рис. 1. Графический тест хаоса логистического отображениябез джокера $l = 3.7$.

Определение соответствующего размера для e для заданного множества данных может быть выполнено следующим образом. Во-первых, вычисляется максимальное расстояние между двумя наблюдениями в множестве. Во-вторых, устанавливают e равное некоторой малой части этой разности (между 0.01 и 0.1) и строят график "тесного возврата". Если выбранное e слишком мало, то на графике будет недостаточно черных точек, чтобы идентифицировать картину, характеризующую данные, когда e оказывается меньше среднеквадратичного отклонения шума, присутствующего в данных, картинка разрушается полностью. Если e слишком большое, то картинка будет скрыта. Как только соответствующее значение e определено, будет достаточный массив точек, позволяющий определить тип изображения, порождаемого данными. Уровень e может изменяться внутри определенных пределов без изменения качественной природы изображения. Точное определение e не является критичным для интерпретации поведения данных.

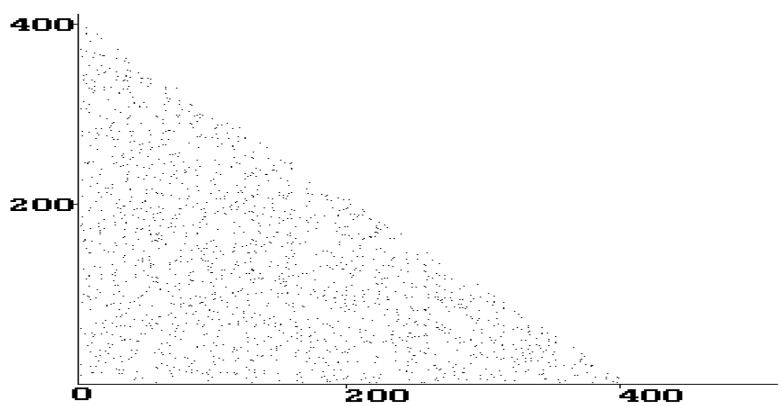


Рис. 2. Графический тест хаоса для псевдослучайной последовательности.

3. Выявление джокера и определение его типа с помощью графического теста. Периодический сигнал может быть обнаружен по сплошным черным линиям, проходящим горизонтально вдоль всего графика через интервалы, определенные периодичностью измерений в единицах времени наблюдений. Квазипериодические орбиты (состоящие из двух частот) производят изображение, похожее на карту, вычерченную в горизонталях. На рисунке 3 видны характерные сплошные горизонтальные линии, свидетельствующие о присутствии в системе точечного джокера.

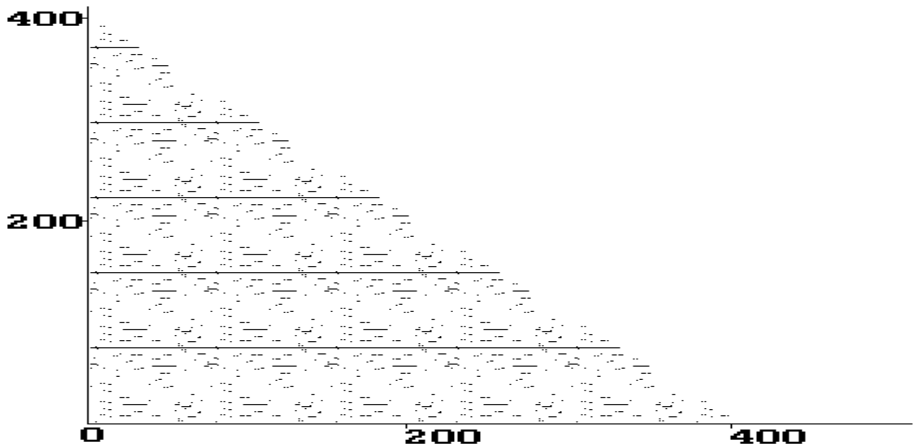


Рис. 3. Графический тест хаоса логистического отображения с точечным джокером $l = 3.7$.

Рисунок 4 представляет собой более сложную структуру – на нем присутствуют «пустые» области, не содержащие точек, и области

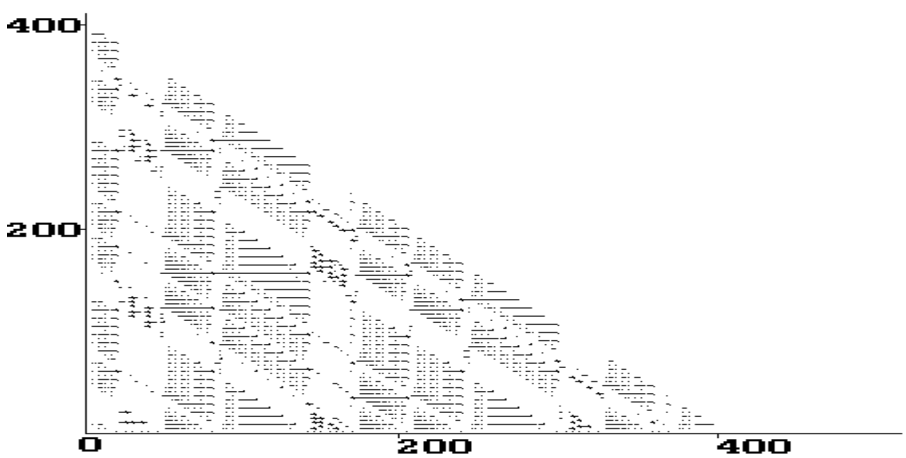


Рис. 4. Графический тест хаоса логистического отображения с интервальным джокером $l = 3.57$.

с горизонтальными параллельными отрезками. Наличие «пустых» областей свидетельствует о разрывах в отображении, а отрезки горизотальных прямых – о «шумящих» циклах, то есть эта картина характерна для систем с интервальным джокером.

Дополнительная информация, которую позволяет получить предлагаемый тест для систем с точечным джокером, состоит в длине ряда наблюдений, заключенных между двумя последовательными попаданиями системы в джокер.

Следует отметить, что содержательный анализ экономических систем [5,6] позволяет сделать предположение, что в них наиболее часто встречаются именно точечные джокеры, отражающие влияние государственного регулирования деятельности экономических объектов. Хотя в работе [4] приведены графики "тесного возврата" для еженедельных биржевых индексов и для данных о времени, потерянном от забастовок, которые имеют структуру, характерную для систем с интервальным джокером.

Таким образом, предложенный метод позволяет даже для коротких рядов экспериментальных данных (порядка 200–400 наблюдений) обнаружить тип поведения системы и сделать вывод о присутствии джокера в системе, причем отличить точечный джокер от интервального.

4. Оценка числовых характеристик динамических систем с джокером. Следующим вопросом, который возникает после обнаружения джокера, является вопрос: нельзя ли каким-то образом «отделить» джокер, т. е. оценить числовые характеристики отображения, действующего в области G.

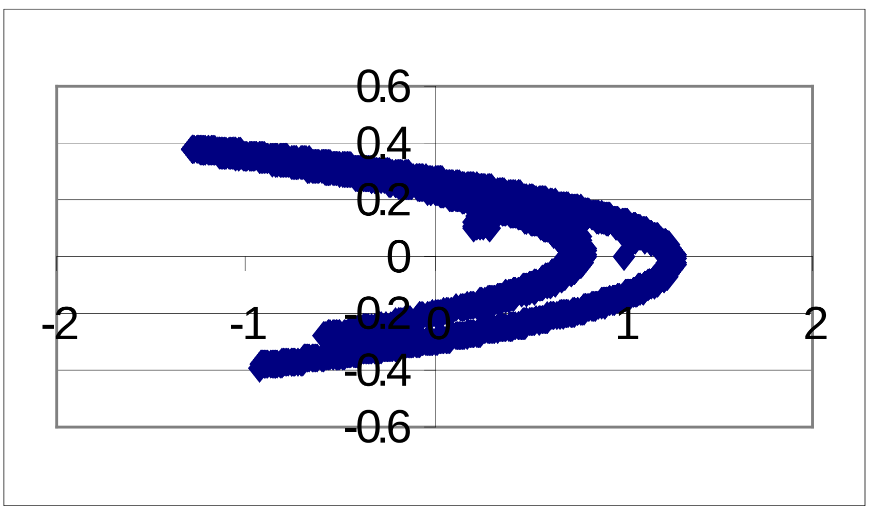
Для ответа на этот вопрос было проведено исследование, результаты которого кратко можно изложить следующим образом:

- так как точечный джокер гораздо сильнее изменяет поведение динамической системы (как одномерной, так и n-мерной), то для дальнейшего анализа систем с точечным и интервальным джокерами необходимо разрабатывать различные методы;
- для систем с точечным джокером определяющее значение имеет размер области J, ее расположение по отношению к области G, а также значение x_n, в которое попадает система после посещения джокера. Все эти параметры влияют на длину последовательности наблюдений между двумя последовательными посещениями джокера. Как правило, чем больше область J, тем короче эта последовательность. Если учесть, что мера множества J должна быть гораздо меньше меры множества G [2], можно надеяться, что в ряде систем длина этой последовательности может достигать нескольких сотен наблюдений. Если последовательность короткая, то мы фактически наблюдаем циклическое поведение, при этом основное влияние на поведение системы оказывает джокер, а не отображение $x_n = f(x_{n-1})$, поэтому опре-

делять характеристики этого отображения не имеет смысла. Если же последовательность относительно длинная, то можно использовать известные на сегодняшний день методы оценки числовых характеристик странного аттрактора по коротким рядам данных, например, метод оценки показателей Ляпунова, описанный в [6].

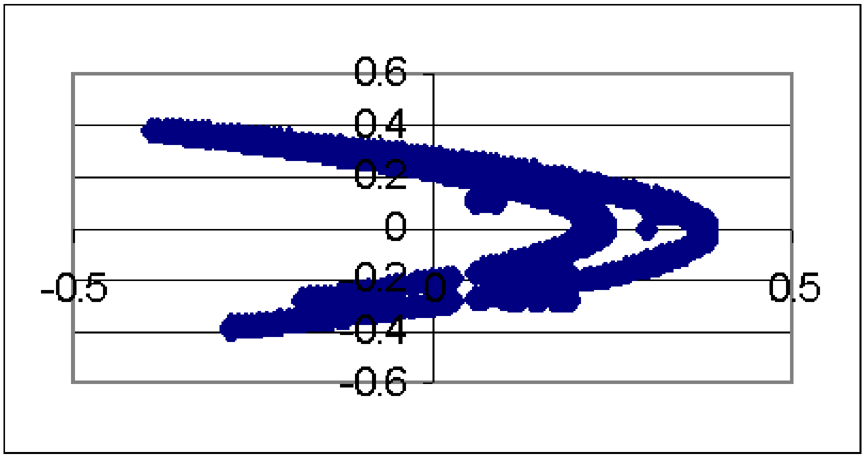
- Для систем с интервальным джокером предлагается по ряду наблюдений строить псевдофазовое пространство с целью обнаружить, в какой области значений можно выделить связное подмножество аттрактора. Если такая область значений существует, то необходимо “отфильтровать” из исходного временного ряда наблюдения, попадающие в эту область и по ним вычислить оценку размерности аттрактора. Так как странный аттрактор представляет собой самоподобное множество, а фрактальная размерность является локальной характеристикой этого множества, то оценка размерности, полученная для части аттрактора, должна совпадать с оценкой для всего аттрактора. Если таких связных областей несколько, то можно выполнить оценку размерности для каждой из них и произвести тестирование гипотезы о равенстве этих размерностей. Строгое математическое обоснование этой процедуры выходит за рамки данной статьи.

Рис. 5. Аттрактор системы Хенона с интервальным джокером**.**



Для иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим фазовое простанство системы, порождаемой системой уравнений Хенона $\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$ с $a = 1.4$, $b = 0.3$ и с интервальным джокером $x_i \in [0,1;0,2]$, $y_i \in [-0,3;-0,1]$; область после_джокера $x_i \in [0,2;0,3]$, $y_i \in [0,1;0,3]$. Это фазовое пространство изображено на рис.5. На рис.6 приведено псевдофазовое пространство размерности 2 для отображения Хенона с интервальным джокером, причем для построения этого пространства выбран ряд наблюдений по y_i. Видно, что для значений $y_i \in [0;0,4]$ аттрактор не имеет разрывов. Выбрав из ряда значения, попадающие в этот интервал, мы получили ряд, оценка корреляционной размерности которого равна 1.19, что практически совпадает с корреляционной размерностью отображения Хенона без джокера, равной 11.21 [7].

Рис. 6. Псевдофазовое пространство системы Хенона с джокером.



Список использованной литературы

1. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего.– М: Наука, 1997.–285 с.
2. Белайчук Л.В. Малинецкий Г.Г. Как обнаружить джокер в эксперименте // В сборнике “Математика. Компьютер. Образование” /Под ред. Ризниченко Г.Ю. –Вып. 5.– Ч. II.– С. 17–31.
3. Белайчук Л.В. Малинецкий Г.Г. Проделки джокера на одномерном отображении // Труды Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Пущино. 29.01– 3.02 1997 .–С. 24–31.
4. Claire G. Gilmore (1993), A New Test for Chaos// Journal of Economic Behavior and Organization.–1993.– 22– pp. 209–237
5. В.А.Перепелица, А.Ю.Позднякова, Л.Н.Сергеева Анализ экономических временных рядов методами теории хаоса // Труды международной научной конференции «Статистический и прикладной анализ временных рядов» (SAATS–97).– Брест–1997.– С. .36–43
6. Chaos Theory in Economics: Methods, Models and Evidence. Edited by Dechert W. D., Edward Elgar PC, 1996.–596 p.
7. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988

Поступила в редколлегию 12.05.2000