

4. Персидский С. К. К вопросу об абсолютной устойчивости.//Изв. АН СССР, Автоматика и телемеханика. – 1969. – N12. – С. 5–11.
5. Персидский С. К., Дремов С. Ю. Об устойчивости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений.// Межд. сб. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2(6). – Казань: КАИ, 1997. – С. 20–25.

Поступила в редколлегию 12.07.00

УДК 517.93

Е.А.ШУШЛЯПИН, канд. техн. наук, Л.Н.КАНОВ, канд. техн. наук,
Севастоп. гос. техн. ун-т

СИНТЕЗ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Предложен метод синтеза терминального управления линейной непрерывно-дискретной системы с квадратичным критерием качества, основанный на теории моделей конечного состояния. Приведен пример управления разгоном электропривода постоянного тока.

Управление динамическими системами с помощью микропроцессоров и ЭВМ приводит к необходимости математического описания таких систем в виде непрерывно-дискретных моделей. В [1], например, подобная линейная система представлена совокупностью дифференциальных уравнений, описывающих ее на интервалах непрерывности $t_k \leq t < t_{k+1}$ и разностных уравнений, описывающих скачки состояния в дискретные моменты t_k :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_C(t_k)x(t) + B_C(t)u_C(t), t \notin q, \\ x(t_k) &= A_D(t_k)x(t_k - 0) + B_D(t_k)u_D(t_k), t_k \in q, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $A_C(t), B_C(t)$ – матрицы непрерывной части системы; $u_C(t)$ – вектор непрерывного управления; $A_D(t_k), B_D(t_k)$ – матрицы дискретной части системы; $u_D(t_k)$ – вектор дискретного управления; q – множество точек t_k на временной оси, в которых вектор состояния $x(t)$ претерпевает разрывы (скачки). Обобщение формулы Коши-Лагранжа для представления состояния системы (1) в заданный момент t_f через состояние в другой момент времени t дается в [1] выражением:

$$x(t_f) = W(t_f, t)x(t) + \int_t^{t_f} W(t_f, t)B_C(t)u_C(t)dt + \sum_{k=1}^N W(t_f, t_k)B_D(t_k)u_D(t_k). \quad (2)$$

Здесь матрица весовых функций W также описывается уравнениями со скачками либо как функция первого аргумента, либо – второго:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW(t, t)}{dt} &= A_C(t)W(t, t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ W(t_k, t) &= A_D(t_k)W(t_k - 0, t), \quad t_k \in q, \quad W(t, t) = I; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW(t_f, t)}{dt} &= -W(t_f, t)A_C(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ W(t_f, t_k - 0) &= W(t_f, t_k)A_D(t_k), \quad t_k \in q, \quad W(t_f, t_f) = I, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где I – единичная матрица.

В настоящей работе рассматривается синтез непрерывного $u_C(t)$ и дискретного управлений системой (1), переводящих ее из начального состояния $x(t_0)$ в заданное конечное состояние x^* в момент t_f . Таким образом, момент t_f характеризуется нулевым значением критерия J :

$$J = (x(t_f) - x^*)^T \cdot F \cdot (x(t_f) - x^*),$$

где $F - n \times n$ положительно определенная матрица весовых коэффициентов.

В соответствии с методом конечного состояния [2] назовем переменной конечного состояния ту часть (2), которая зависит только от состояния в момент t

$$y(t_f, t) = W(t_f, t)x(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (5)$$

Критерий J тогда эквивалентен значению функции $J(t_f, t)$

$$J(t_f, t) = (y(t_f, t) - x^*)^T \cdot F \cdot (y(t_f, t) - x^*), \quad (6)$$

взятой в момент $t = t_f$. При этом $J(t_f, t)$, как функция t , имеет скачки в моменты t_k как из-за наличия скачков в значениях элементов весовых матриц (4), так и из-за скачков вектора состояния (1).

Найдем такое непрерывное управление $u_C(t)$, чтобы изменение критерия $J(t_f, t)$ от своего начального значения $J(t_f, t_0)$ к нулевому на участках непрерывности подчинялось дифференциальному уравнению

$$T \frac{dJ(t_f, t)}{dt} = -J(t_f, t) + J^*, \quad (7)$$

где T – желаемая постоянная времени, а J^* выбирается так, чтобы в момент t_f значение критерия $J(t_f, t_0)$ равнялось нулю:

$$J^* = \frac{J(t_f, t_0)}{1 - \exp\left(-\frac{t_f}{T}\right)}. \quad \text{Выражение для производной } \frac{dJ(t_f, t)}{dt} \text{ можно}$$

получить, дифференцируя критерий (6) по второму аргументу:

$$\frac{dJ(t_f, t)}{dt} = 2(y(t_f, t) - x^*)^T F \frac{dy(t_f, t)}{dt},$$

где производная $\frac{dy(t_f, t)}{dt}$, в свою очередь, получается дифференцированием выражения (6) с учетом (4)

$$\frac{dy(t_f, t)}{dt} = \frac{dW(t_f, t)}{dt} x(t) + W(t_f, t) \frac{dx}{dt} = W(t_f, t) B_C(t) u_C(t),$$

так что
$$\frac{dJ(t_f, t)}{dt} = 2(y(t_f, t) - x^*)^T F W(t_f, t) B_C(t) u_C(t).$$

Следовательно, уравнение изменения критерия (7) имеет вид:

$$2T(y(t_f, t) - x^*)^T F W(t_f, t) B_C(t) u_C(t) = -J(t_f, t) + J^*.$$

Выполняя псевдообращение [3], получаем вектор непрерывного управления, обеспечивающий нулевое значение критерия (6) в момент t_f :

$$u_C(t) = \frac{1}{2T} \left[(y(t_f, t) - x^*)^T F W(t_f, t) B_C(t) \right]^+ (J(t_f, t) - J^*), \quad (8)$$

где $t \in [t_k, t_{k+1}]$, а знак $+$ означает псевдообращение матрицы.

Найдем теперь такое дискретное управление $u_D(t_k)$, чтобы в моменты скачков критерий уменьшался в p раз:

$$J(t_f, t_k) - J(t_f, t_k - 0) = -\frac{J(t_f, t_k - 0)}{p}, \quad p \geq 1. \quad (9)$$

Для этого получим выражение, определяющее скачки $y(t_f, t_k)$. На основании (5), (1) и (4) запишем:

$$\begin{aligned} y(t_f, t_k) &= W(t_f, t_k) x(t_k) = W(t_f, t_k) A_D(t_k) x(t_k - 0) + \\ &+ W(t_f, t_k) B_D(t_k) u_D(t_k) = W(t_f, t_k - 0) x(t_k - 0) + W(t_f, t_k) B_D(t_k) u_D(t_k) = \\ &= y(t_f, t_k - 0) + W(t_f, t_k) B_D(t_k) u_D(t_k). \end{aligned}$$

Теперь уравнение для скачка критерия (9) представим в виде

$$\Delta y^T F \Delta y - J(t_f, t_k - 0) = -\frac{J(t_f, t_k - 0)}{p},$$

$$\Delta y = y(t_f, t_k - 0) + W(t_f, t_k) B_D(t_k) u_D(t_k) - x^*,$$

откуда

$$\frac{J(t_f, t_k - 0)}{p} +$$

$$+ \left[2 \left(y(t_f, t_k - 0) - x^* \right) + W(t_f, t_k) B_D(t_k) u_D(t_k) \right]^T \times \quad (10)$$

$$\times F W(t_f, t_k) B_D(t_k) u_D(t_k) = 0.$$

Последнее выражение представляет собой уравнение второго порядка для определения дискретного управления $u_D(t_k)$.

После расчета дискретного управления $u_D(t_k)$ для определения $u(t)$ на очередном участке непрерывности следует обновить значение J^* в (2), заменив $J(t_f, t_0)$ на $J(t_f, t_k)$.

Очевидно, непрерывное и дискретное управления конкурируют между собой в формировании поведения критерия $J(t_f, t)$. В частности, в любой момент t_k можно положить $p=1$, что соответствует $J(t_f, t_k)=0$. Последнее означает, что управления $u_C(t)$ и $u_D(t_{k+i})$ в каждый момент времени $t > t_k$, подсчитанные по (8) и (10), будут нулевыми. Таким образом, существует принципиальная возможность приведения системы (1) в заданное состояние за один такт к моменту t_f . В общем случае для произвольного p , в том числе и для $p=1$, решения уравнения (10) для вектора $u_D(t_k)$ может и не существовать. Однако, задавая p достаточно большим, можно получить приемлемые управления.

При практической реализации (8) и (10) можно учесть и ограничения на управляющие воздействия. На их величины оказывают влияние постоянная времени T , коэффициент p и количество тактов дискретного управления.

Для иллюстрации рассмотрим управление разгоном электропривода постоянного тока с математической моделью

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= -ri - C_e w + u, \\ J \frac{dw}{dt} &= C_M i - kw, \\ \frac{du}{dt} &= u_C. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $i(t), w(t)$ – ток и скорость – непрерывные координаты привода, u_C – непрерывное управление, $u(t_k) = u(t_k - 0) + u_D$ – напряжение привода, u_D – дискретное управление. Таким образом, u_C определяет входное напряжение u привода на интервалах непрерывности, а u_D – определяет его скачки (что имеет место, например, при применении пускового реостата).

В выражении критерия (6) определим переменные:

$$y(t_f, t) = [i(t_f, t), w(t_f, t)]^T, x^* = [i^*, w^*]^T, F = \text{diag}(F_1, F_2),$$

где $i(t_f, t), w(t_f, t)$ – переменные конечного состояния для тока и скорости непрерывной части привода, i^*, w^* – значения тока и скорости стационарного режима. Матрицы модели (1) при этом следующие:

$$A_C = \begin{pmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{C_e}{L} & 1 \\ \frac{C_M}{J} & -\frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_D = I, B_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Тогда выражение (8) для непрерывного управления $u_C(t)$ примет вид:

$$u_C(t) = \frac{J^* - F_1 (i(t_f, t) - i^*)^2 - F_2 (w(t_f, t) - w^*)^2}{2T [(i(t_f, t) - i^*) F_1 W_{13}(t_f, t) + (w(t_f, t) - w^*) F_2 W_{23}(t_f, t)]}$$

а (10) для дискретного –

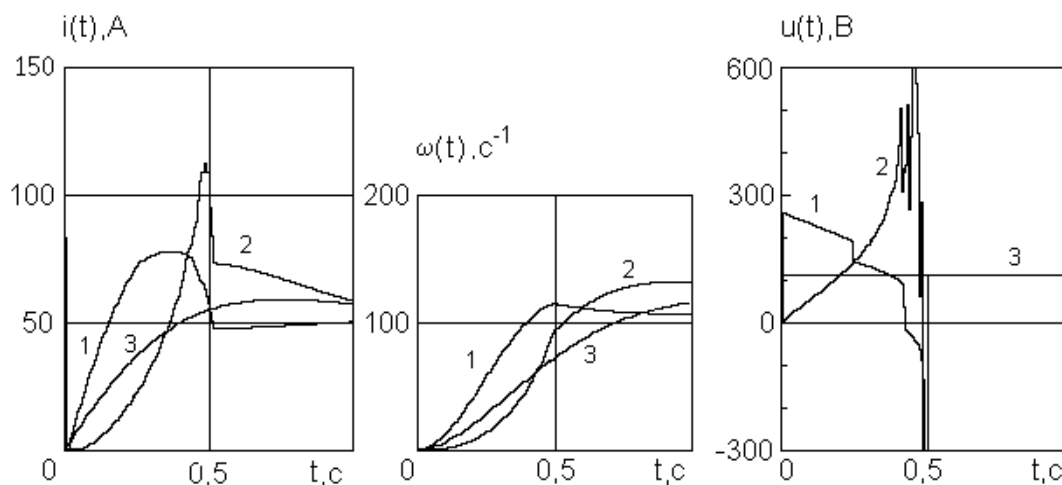
$$\begin{aligned} & u_D^2(t_k) (F_1 W_{13}^2(t_f, t_k) + F_2 W_{23}^2(t_f, t_k)) + \\ & + 2u_D(t_k) (\Delta i F_1 W_{13}(t_f, t_k) + \Delta w F_2 W_{23}(t_f, t_k)) + \frac{J(t_f, t_k - 0)}{p} = 0, \end{aligned}$$

$$\Delta i = i(t_f, t_k - 0) - i^*, \Delta w = w(t_f, t_k - 0) - w^*.$$

Для расчета оптимального управления предварительно по системе (4) определяется и сохраняется в компьютерной памяти весовая матрица как функция второго аргумента. Заметим, что в данном частном случае весовая матрица в силу (12) скачков не испытывает. Далее определяется $y(t_f, t_0)$. Для этого при заданных начальных условиях интегрируется система (11) при $u_C \equiv 0$ и $u_D \equiv 0$ на интервале $[t_0, t_f]$. Зафиксированные в момент t_f значения фазовых координат i , w и образуют искомые значения переменных конечного состояния $i(t_f, t_0)$, $w(t_f, t_0)$. По выражению (6) рассчитывается критерий $J(t_f, t_0)$ и по (8) определяется управление $u_C(t_0)$ для первого шага интегрирования системы (11). При $t = t_0 + h$, т.е. через шаг интегрирования системы (11) получен вектор $x(t_0 + h) = [i(t_0 + h), w(t_0 + h), u(t_0 + h)]^T$. Подобный процесс повторяется на каждом шаге интегрирования системы (11) вплоть до момента первого скачка t_1 . Тогда по (10) рассчитывается дискретное управление $u_D(t_1)$, пересчитывается координата $u(t_k)$, критерий $J(t_f, t_k)$, J^* и далее продолжается расчет непрерывного управления $u_C(t)$. Таким образом, в момент t_k напряжение $u(t)$ претерпевает разрыв, определяемый $u_D(t_k)$. Заметим, что при практической реализации управления электроприводом с моделью (11) $W_{13}(t_f, t)$, $W_{23}(t_f, t)$, $i(t_f, t)$, $w(t_f, t)$ могут быть получены аналитически. При этом возможно управление приводом в реальном времени по принципу обратной связи.

Для анализа был выбран двигатель постоянного тока П51 мощности 5 кВт с номинальным напряжением 110 В и с параметрами: $r = 0,7 \text{ Ом}$, $L = 0,6 \text{ Гн}$ – сопротивление и индуктивность якоря; $C_e = 0,67 \text{ В} \cdot \text{с}$ – электрическая постоянная; $C_M = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{а}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – механическая постоянная; $J = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – момент инерции; $k = 0,7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ – коэффициент трения. Постоянная времени критерия T выбрана 0,16 с. Интегрирование дифференциальных уравнений выполнялось методом Рунге-Кутты с шагом 0,001с на интервале $t_f = 1 \text{ с}$. При этом до момента 0,5с управление производилось с помощью алгоритма (8), (10), а оставшееся время – при входном напряжении, равном номинальному (110 В). Скачки назначались в моменты $t_1 = 0,005 \text{ с}$, $t_2 = 0,25 \text{ с}$, $t_3 = 0,425 \text{ с}$, коэффициент $p = 2$, т.е. после каждого скачка критерий должен уменьшаться в два раза. Весовые коэффициенты приняты следующими: $F_1 = 1$, $F_2 = 24$, что объясняется же-

ланием в большей мере управлять скоростью привода. Стационарный режим характеризуется током $i^* = 51,5 \text{ A}$ и скоростью $w^* = 110,37 \text{ c}^{-1}$. Графики тока, скорости и напряжения показаны на рисунке. Кривые 1 относятся к случаю непрерывно-дискретного управления, кривые 2 – к случаю непрерывного управления, кривые 3 – к случаю включения привода постоянным напряжением 110 В.



Из анализа результатов следуют выводы:

- 1) время регулирования при использовании непрерывно-дискретного управления типа (8), (10) примерно в два раза меньше, чем при включении постоянным напряжением;
- 2) непрерывное управление типа (8) уменьшает время регулирования, однако при этом перенапряжение превышает допустимое;
- 3) точность непрерывно-дискретного управления выше, чем при использовании рассматриваемых альтернативных управлений; установившиеся значения тока и скорости для случаев 1, 2, 3 соответственно равны: ток – 50,2, 58,4, 57 ампер, скорость – 106,8, 130,4, 115,3 рад/с (сравните с желаемыми $i^* = 51,5 \text{ A}$, $w^* = 110,37 \text{ c}^{-1}$).

Список использованной литературы

1. Барабанов А.Т., Агранович Г.А. Линейные модели и оптимизация непрерывно-дискретных динамических систем //Динам. системы.–1983.–Вып.2.–С. 17–24.
2. Шушляпин Е.А. Синтез линейных и нелинейных систем управления конечным положением на основе моделей конечного состояния //Проблемы управления и информатики.–1997.–№3.–С. 10–15.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.–М.: Наука, 1988.–552 с.

Поступила в редколлегию 20.12.99