$$Q = (L^{-1})^T (C_0^T C_0 + a^T a) L^{-1}, \qquad N = -a\, L^{-1},$$

причем сформулированное выше условие существования критерия очевидно выполнено.

Таким образом, по крайней мере при условии (7), представленный алгоритм может оказаться существенно проще традиционного решения, использующего матричное уравнение Риккати.

Список использованной литературы

1. Дубовик С.А. Синтез линейных сингулярно возмущенных систем // Динам. системы. – 1999. – Вып.15.–С. 45–49.
2. Дубовик С.А. Аналитическое конструирование регуляторов для сингулярно возмущенных систем // Проблемы управления и информатики.–1999.– №5.–С. 54–68.
3. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. – М.: Машиностроение, 1986.– 262 с.
4. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления.–М.: Наука, 1986.– 616 с.

Поступила в редколлегию 23.11.99

УДК 530.1

В.А.ТЕМНЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац.ун-т .

ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕХНИКА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ: ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ

Представлен эффективный метод построения периодических решений для нелинейных осцилляторов.

Как известно, основное направление исследований нелинейных колебаний в последние десятилетия – изучение хаотических движений и странных аттракторов. Однако сохраняется определенный интерес и к классической проблеме периодических решений. Периодические движения (если они существуют) часто содержат ключи для понимания структуры любых решений; иногда другие – непериодические решения – вовсе не представляют практического интереса.

Известно много способов построения периодических решений. Если задача близка к некоторой порождающей ее линейной проблеме, то, вероятно, наиболее эффективная техника – это метод Линдштедта-Пуанкаре (см. например [1]), основанный на разложении решения и неизвестной заранее частоты колебаний в степенные ряды по амплитуде колебаний. Методика Линдштедта-Пуанкаре превращает исходную нелинейную задачу в бесконечную цепочку неоднородных линейных дифференциальных уравнений. Условие периодичности решения, эквивалентное условию отсутствия "вековых" слагаемых в решении, определяет частоту колебаний.

Однако во многих случаях более эффективной является техника Фурье. Построение решения в виде ряда Фурье позволяет автоматически удовлетворить условию периодичности решения (разумеется, если ряд Фурье сходится). Применение метода Фурье к задачам с полиномиальными нелинейностями превращает исходные дифференциальные уравнения в бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений. Применение итерационной процедуры к решению соответствующей системы алгебраических уравнений создает весьма эффективный метод построения периодических решений для нелинейных осцилляторов. Несмотря на некоторую "классичность", элементарность метода – у подготовленного читателя, несомненно, возникает впечатление, что метод мог появиться, как минимум, за полстолетия до работ Пуанкаре – нам не удалось обнаружить в литературе свидетельств применения этого метода; возможно, здесь он излагается впервые.

Рассмотрим применение метода на примере одномерного осциллятора Дуффинга. Наличие точного решения задачи о свободных колебаниях осциллятора с кубической нелинейностью позволяет оценить точность любого метода построения решения.

При соответствующем выборе единиц измерения задачу Дуффинга можно свести к решению следующего уравнения:

$$w^2\ddot{x} + x + nx^3 = 0; \qquad (1)$$

в котором w – неизвестная заранее частота колебаний, $n = \pm 1$ – параметр, позволяющий различать системы с жесткой характеристикой $(n = +1)$ и мягкой характеристикой $(n = -1)$.

Аргументом в уравнении (1) является время t; точка над буквой означает производную по t. Ищется $2p$ периодическое решение (1) при начальных условиях:

$$x(0) = e; \qquad (2)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \qquad (3)$$

где e – амплитуда колебаний.

Условие (3) создает четное решение уравнения (1). В силу автономности решения (1), четные и нечетные решения различаются только фазовым сдвигом.

Разыскивая решение задачи в виде ряда Фурье по косинусам нечетных гармоник:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos(2n+1)t\,, \qquad (4)$$

мы удовлетворим начальное условие (3) и условие $2p$ - периодичности решения.

Подстановка (4) в начальное условие (2) и уравнение колебаний (1), создает следующие алгебраические соотношения для коэффициентов Фурье a_n и частоты w:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e, \tag{5}$$

$$a_n(1 - w^2(2n+1)^2 + \frac{n}{2}b_0) + \frac{n}{4}c_n = 0, \tag{6}$$

$$(n \geq 0),$$

где

$$b_0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^2; \qquad c_0 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(a_m + a_{m-1});$$

$$\text{для } m \geq 1: \ b_m = \sum_{l=0}^{m-1} a_l(a_{m-l-1} + a_{m+l}) + \sum_{l=m}^{\infty} a_l(a_{l+m} + a_{l-m});$$

$$\text{для } n \geq 1: \ c_n = \sum_{m=1}^{n} b_m(a_{n-m} + a_{n+m}) + \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m(a_{n+m} + a_{m-n-1}); \tag{7}$$

Уравнения (6) с учетом (7) образуют бесконечную систему кубических уравнений относительно Фурье-коэффициентов a_n. Нормировочное соотношение (5) позволяет связать частоту w и амплитуду e.

Для решения алгебраической системы уравнений (6) удобно трактовать ее следующим образом. Уравнение из системы (6) для $n = 0$ разрешим относительно частоты w:

$$\boxed{w^2 = 1 + \frac{n}{4}\left(2b_0 + \frac{c_0}{a_0}\right)} \tag{8}$$

Остальные уравнения (6) для $n \geq 1$ "полуразрешим" относительно a_n, условно трактуя c_n и b_0 как заданные величины:

$$\boxed{a_n = \frac{nc_n}{16n(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{2}\left(b_0 + \frac{(2n+1)^2}{8n(n+1)} \cdot \frac{c_0}{a_0}\right)};} \quad (n \geq 1) \tag{9}$$

Термин "полуразрешенное уравнение" отражает тот факт, что величины a_n содержатся в правой части (9), входя в выражения для b_0, c_0 и c_n.

Если величины a_n при $n \geq 1$ каким-либо образом известны, то нормировочное условие (5) может быть использовано для нахождения a_0:

$$\boxed{a_0 = e - \sum_{n=1}^{\infty} a_n}. \tag{10}$$

Уравнения (8), (9), (10) совместно с (7), можно использовать для запуска итерационной процедуры, определяющей коэффициенты Фурье a_n и частоту колебаний w при заданной амплитуде e.

Пусть в некоторой итерации с номером i известны величины $a_n^{(i)}$ для $n \geq 1$. Вычислим в той же итерации $a_0^{(i)}$ по формуле (10) и коэффициенты $b_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$ для $n \geq 0$ по формулам (7), используя коэффициенты Фурье $a_n^{(i)}$ i-того приближения. (индекс i, взятый в скобки –номер итерации). Подставляя величины $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$ в правые части уравнений (8) и (9), вычислим частоту колебаний $w_{(i+1)}^2$ и коэффициенты Фурье $a_n^{(i+1)}$ ($n \geq 1$) в $i+1$-ом приближении:

$$w_{(i+1)}^2 = 1 + \frac{n}{4}\left(2b_0^{(i)} + \frac{c_0^{(i)}}{a_0^{(i)}}\right); \tag{11}$$

$$a_n^{(i+1)} = \frac{nc_n^{(i)}}{16n(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{2}\left(b_0^{(i)} + \frac{(2n+1)^2}{8n(n+1)} \cdot \frac{c_0^{(i)}}{a_0^{(i)}}\right)}; \quad (n \geq 1) \tag{12}$$

Далее возвращаемся к началу выделенного жирным шрифтом абзаца и делаем следующую **итерацию.**

Скорость сходимости подобной итерационной процедуры зависит от выбора стартового приближения $a_n^{(0)}$ **(**$n \geq 1$**).** При достаточно малых e хорошим стартовым приближением будет тривиальное:

$$a_n^{(0)} = 0 \text{ для } n \geq 1. \tag{13}$$

Из структуры уравнений (6) и (9) вытекает, что при стартовом приближении (13) на каждой итерации необходимо вычислять только конечное число коэффициентов $a_n^{(i)}$**,** $b_n^{(i)}$**,** $c_n^{(i)}$**:**

$$
\begin{aligned}
&a_n^{(i)} = 0 \ \text{ при } \ n > N_a^{(i)} = \frac{1}{2}(3^i - 1);\\
&b_n^{(i)} = 0 \ \text{ при } \ n > N_b^{(i)} = 3^i;\\
&c_n^{(i)} = 0 \ \text{ при } \ n > N_c^{(i)} = \frac{1}{2}(3^{i+1} - 1).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Первая итерация решения при стартовой аппроксимации (13) имеет следующий вид:
$i = 1$:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \bar{e} \cdot q; \quad a_n = 0 \quad n \geq 2\\
&w^2 = 1 + 24q;\\
&a_0 = e - a_1,
\end{aligned} \tag{15}
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
&q = \frac{ne^2}{32};\\
&\bar{e} = \frac{e}{1 + 25q}
\end{aligned}
\right\} \tag{16}
$$

Вторая итерация:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \bar{e} \cdot q \cdot \frac{1 + 75q + 1872q^2 + 15553q^3}{1 + 75q + 1852q^2 + 15091q^3};\\
&a_2 = \bar{e} \cdot q^2 \cdot \frac{2 + 74q + 1201q^2}{3 + 223q + 5454q^2 + 43971q^3};\\
&a_3 = \bar{e} \cdot q^3 \cdot \frac{2(1 + 24q)}{6 + 455q + 10953q^2 + 87921q^3};\\
&a_4 = \bar{e} \cdot q^4 \cdot \frac{2}{20 + 1401q + 31991q^2 + 237371q^3};\\
&a_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 5\\
&w^2 = 1 + 8q \frac{3 + 147q + 1805q^2}{(1 + 25q)^2};\\
&a_0 = e - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Гармоники ряда Фурье "размножаются" с каждой итерацией с экспоненциальной скоростью (см. (14)). Третья итерация дает 13 гармоник, четвертая – 40. "Ручные" вычисления становятся затруднительными, но применение известных программ компьютерной алгебры позволяет сделать несколько итераций и получить частоту w и коэффициенты Фурье $a_n^{(i)}$ в виде Паде-аппроксимант относительно параметра q. Как известно, Паде-аппроксиманты являются более эффективным средством вычислений, чем степенные ряды по e, применяемые в технике Линдштедта-Пуанкаре.

Аналогичным образом можно построить периодическое решение неоднородного уравнения Дуффинга с периодической правой частью, заданной в виде ряда Фурье, – или в виде конечного числа Фурье-гармоник. При этом параметр w становится заданным (частота возбуждения), а начальные условия (2) и (3) не используются. Уравнения для Фурье-коэффициентов решения (6) перестают быть однородными: в правых частях появляются соответствующие амплитуды Фурье-гармоник возбуждения. Так можно построить решение для "основного тона" (вынужденное колебание имеет тот же период, что и возбуждение) и для унтертонов (период колебаний в целое число раз больше периода возбуждения). Особый интерес в этих процедурах представляют границы сходимости соответствующих рядов Фурье в пространстве параметров (частота возбуждения; амплитуды Фурье-гармоник возбуждения). Вне зон сходимости ряда Фурье отсутствуют периодические решения неоднородного уравнения Дуффинга с периодической правой частью, и мы возвращаемся к тому, с чего начали эту заметку: все-таки самое интересное в теории колебаний – это изучение хаоса…

Список использованной литературы

1. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

Поступила в редколлегию 20.04.00