УДК 517.9:532

Д.А. ЗАКОРА, аспирант, Таврический нац. ун-т

О СТРУКТУРЕ И ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА В ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

В работе рассматривается спектральная задача, к которой сводится изучение задачи о нормальных колебаниях вращающейся гидросистемы “вязкая жидкость+система идеальных жидкостей”. Получены асимптотические формулы для части ветвей собственных значений и утверждение о предельном спектре задачи.

1. Постановка задачи. В работах [1] и [2] рассмотрены задачи о малых движениях вращающихся гидросистем содержащих тяжелую вязкую и одну или несколько, соответственно, тяжелых идеальных жидкостей. Изучение задач о нормальных колебаниях таких гидросистем, может быть сведено к изучению следующей спектральной задачи в некотором гильбертовом пространстве $\mathrm{H} := H_0 \oplus H \oplus E$:

$$L(l)x := (l^2\mathrm{T} - lm\mathrm{P} - 2lw_0 i\mathrm{K} + \mathrm{B})x = 0, \quad x \in \mathrm{H}, \qquad (1)$$

где l, $m > 0$, $w_0 > 0$, i – это спектральный параметр, коэффициент динамической вязкости, угловая скорость вращения сосуда и мнимая единица соответственно, $\mathrm{T} := diag\left(T, A_{2,2}, I_E\right)$, $\mathrm{P} := diag\left(I_0, 0, 0\right)$, $x := \left(y_0, y, j\right)^t$. Ненулевые компоненты операторного блока B имеют вид: $\mathrm{B}_{1,1} := B := \breve{B} + Q^*Q$, $\mathrm{B}_{2,2} := I_H$, $\mathrm{B}_{1,2} := -Q^*$, $\mathrm{B}_{2,1} := -Q$. Компоненты операторного блока K имеют вид:

$$\begin{gathered}\mathrm{K}_{1,1} := \breve{S}_{1,1} - Q^*\breve{S}_{2,1} - \breve{S}_{1,2}Q + Q^*\breve{S}_{2,2}Q, \quad \mathrm{K}_{1,2} := \breve{S}_{1,2} - Q^*\breve{S}_{2,2},\\ \mathrm{K}_{1,3} := \breve{S}_{1,3} - Q^*\breve{S}_{2,3}, \quad \mathrm{K}_{2,1} := \breve{S}_{2,1} - \breve{S}_{2,2}Q, \quad \mathrm{K}_{2,2} := \breve{S}_{2,2}, \quad \mathrm{K}_{2,3} := \breve{S}_{2,3}, \qquad (2)\\ \mathrm{K}_{3,1} := \breve{S}_{3,1} - \breve{S}_{3,2}Q, \quad \mathrm{K}_{3,2} := \breve{S}_{3,2}, \quad \mathrm{K}_{3,3} := \tilde{S}_{3,3} := S_G = S_G^* \in L(E).\end{gathered}$$

Почти все операторы, участвующие в определении компонент операторных блоков имеют более детальную структуру. А именно:

$$\begin{gathered}\mathrm{T} := A_{1,1} - A_{1,2}A_{2,2}^{-1}A_{2,1}, \quad A_{1,1} := A^{-1/2}C_{1,1}A^{-1/2}, \quad A_{1,2} := A^{-1/2}C_{1,2}\tilde{B}^{-1/2},\\ A_{2,1} := \tilde{B}^{-1/2}C_{2,1}A^{-1/2}, \quad A_{2,2} := \tilde{B}^{-1/2}C_{2,2}\tilde{B}^{-1/2}, \quad \breve{S}_{1,1} := A^{-1/2}S_{1,1}A^{-1/2},\\ \breve{S}_{1,2} := A^{-1/2}S_{1,2}\tilde{B}^{-1/2}, \quad \breve{S}_{1,3} := A^{-1/2}S_{1,3}C_r^{-1/2}, \quad \breve{S}_{2,1} := \tilde{B}^{-1/2}S_{2,1}A^{-1/2}, \qquad (3)\\ \breve{S}_{2,2} := \tilde{B}^{-1/2}S_{2,2}\tilde{B}^{-1/2}, \quad \breve{S}_{2,3} := \tilde{B}^{-1/2}S_{2,3}C_r^{-1/2}, \quad \breve{S}_{3,1} := C_r^{-1/2}S_{3,1}A^{-1/2},\\ \breve{S}_{3,2} := C_r^{-1/2}S_{3,2}\tilde{B}^{-1/2}, \quad \breve{S}_{3,3} := S_G, \quad Q := A_{2,2}^{-1}A_{2,1} \in S_\infty,\end{gathered}$$

где оператор $A >> 0$ $(A^{-1} \in S_{p_A})$ такой же как в работе [2]. Оператор $\tilde{B} >> 0$ $(\tilde{B}^{-1} \in S_{p_{\tilde{B}}})$ связан с оператором F из [2]. Оператор $C_r >> 0$

ограничен. Если составить из операторов $S_{i,j}$ операторный блок S, то он будет самосопряженным и ограниченным в H. Отсюда и из (2-3) следует, что оператор K самосопряженный и ограниченный в H.

Операторы T, $A_{2,2}$ и $\acute{B}$ компактны. Операторы T и $A_{2,2}$ положительны, а оператор $\acute{B}$ неотрицателен, они имеют степенную асимптотику собственных значений. Операторы I_0, I_H, I_E – это единичные операторы в гильбертовых пространствах H_0, H, и E соответственно. Оператор S_G – это кориолисов оператор, он самосопряженный, весь его спектр является предельным и заполняет отрезок $[-1,1]$. Пространство H_0 связано с полем скоростей в вязкой жидкости. Пространство H связано с частью потенциальных составляющих полей скоростей в идеальных жидкостях. Пространство E связано с вихревыми составляющими полей скоростей в идеальных жидкостях.

2. Основные утверждения о спектре. Прежде чем сформулировать утверждения относительно спектра задачи (1), напомним, какие эффекты наблюдаются при изучении вращающейся вязкой жидкости и вращающейся системы идеальных жидкостей по отдельности.

В спектральной задаче, описывающей нормальные колебания вязкой вращающейся жидкости, существует две ветви собственных значений, локализованных у положительной действительной полуоси, с предельными точками в нуле и на бесконечности. При этом собственным значениям, стремящимся к бесконечности, соответствуют поверхностные волны, а собственным значениям, стремящимся к нулю, – внутренние диссипативные волны. Для вращающейся системы идеальных жидкостей спектр соответствующей спектральной задачи состоит из двух ветвей чисто мнимых комплексно сопряженных собственных значений с предельной точкой на бесконечности и отрезка $[-2w_0 i, 2w_0 i]$ непрерывного спектра. Точкам непрерывного спектра соответствуют внутренние инерциальные волны. Ветви спектра, стремящейся к бесконечности, отвечают поверхностные волны в идеальных жидкостях. В рассматриваемой задаче естественно ожидать, что эффекты, соответствующие консервативной и диссипативной частям гидросистемы, будут некоторым образом суммироваться, как это происходит в аналогичной задаче без вращения.

Предложение 1. *Спектр задачи (1) лежит в правой замкнутой полуплоскости. Исключая отрезок* $\mathrm{I}_{w_0} := [-2w_0 i, 2w_0 i]$, *весь спектр является дискретным. Предельный спектр задачи (1) совпадает с отрезком* I_{w_0}.

Доказательство. Легко проверить, что пучок задачи (1) можно преобразовать к виду $I + F(l)$ фредгольмовой оператор-функции, где

I – это единичный оператор в H, а $F(l)$ компактнозначная оператор-функция, особенностями которой являются отрезок I_{w_0} и ∞. Кроме того, при $a<0$ оператор $I+F(a)$ ограниченно обратим. Отсюда следует, что спектр пучка $L(l)$, не принадлежащий I_{w_0}, является дискретным. Можно проверить также, что дискретный спектр пучка $L(l)$ лежит в правой полуплоскости $(\mathrm{Re}\, l>0)$.

Запишем (1) в виде системы и поделим первое уравнение на m, второе умножим на $-l$, а третье поделим на $-l$. Полученную систему запишем в виде одного векторно-матричного уравнения в H:

$$(i\tilde{S}_G - lI + F_1(l))x = 0, \quad x \in \mathrm{H}, \tag{4}$$

где $\tilde{S}_G := diag(0,0,2w_0 S_G)$, а $F_1(l)$ компактнозначна и аналитична (мы не приводим для нее формулу из-за недостатка места). Произведя в уравнении (4) замену $l := \tilde{l}\, i$ и умножив его на $-i$, получим

$$(\tilde{S}_G - \tilde{l} I - iF_1(\tilde{l} i))x = 0, \quad x \in \mathrm{H}. \tag{5}$$

Зафиксируем некоторое число $\tilde{l}_1 \in \mathrm{I}_{w_0}$ и рассмотрим задачу

$$(\tilde{S}_G - \tilde{l} I - iF_1(\tilde{l}\; i))x = 0, \quad x \in \mathrm{H}.$$

Это задача на собственные значения для самосопряженного оператора $\tilde{S}_G$, возмущенного компактным оператором. Весь спектр оператора $\tilde{S}_G$ является предельным и заполняет весь отрезок I_{w_0}. Согласно теореме Вейля [3], для каждого $\tilde{l}_2 \in \mathrm{I}_{w_0}$ существует некомпактная последовательность Вейля $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\|x_k\|_{\mathrm{H}} = 1$, зависящая от $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$, для которой $\|(\tilde{S}_G - \tilde{l}_2 I - iF_1(\tilde{l}_1 i))x_k\|_{\mathrm{H}} \to 0 \quad (k \to \infty)$. Выбирая $\tilde{l}_2 = \tilde{l}_1$ и соответствующую последовательность Вейля $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, приходим к выводу, что для нее $\|(\tilde{S}_G - \tilde{l}_1 I - iF_1(\tilde{l}_1 i))x_k\|_{\mathrm{H}} \to 0 \quad (k \to \infty)$. Это означает, что выбранная произвольно точка $\tilde{l}_1 \in \mathrm{I}_{w_0}$ принадлежит предельному спектру задачи (5). Осуществляя обратную замену спектрального параметра, получим, что отрезок I_{w_0} принадлежит предельному спектру пучка $L(l)$. Поскольку спектр пучка $L(l)$, лежащий вне отрезка I_{w_0}, дискретен, указанный отрезок совпадает с предельным спектром пучка $L(l)$. Этим завершается доказательство.

Введем следующие две специальные области в комплексной плоскости $(-p < \arg l \le p)$:

$$\Lambda_{R,e} := \{ l \mid \; |l| > R, \quad |\arg l| < e \}, \quad \Lambda_{R,e}^{\pm} := \{ l \mid \; |l| > R, \quad |\arg l\ \mathbf{m}\, p/2| < e \}.$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие известные утверждения (см. [4], [5]).

Лемма 1. (Радзиевский Г. В. [4]) *Пусть* Н – *гильбертово пространство,* $0 < T = T^* \in S_\infty$, $N \in S_\infty$, $0 \le b < 1$, $e \in (0,p)$, *тогда*

$$\left\|(I - l\,T)^{-1}T^{b}\right\| \le C(b;\arg l)\left|l\right|^{-b}, \quad \lim_{h\to\infty}\sup_{l\in\overline{\Lambda h,e}}\left\|(I - l\,T)^{-1}T^{b}N\right\| = 0.$$

Лемма 2. (Оразов М. Б. [5]) *Пусть* $0 < C = C^* \in S_\infty$, *а собственные значения оператора* C *имеют степенную асимптотику. Обозначим*

$$l(l) := I + l^2C + G(l), \quad T(l) := (I - l\,C^{1/2})^{-1}G(l)(I + l\,C^{1/2})^{-1} \qquad .$$

Пусть оператор-функция $G(l)$ *аналитична в области* $\Lambda^+_{R,e} \cup \Lambda^-_{R,e}$,

$\|T(l)\| \to 0 \quad (l \to \infty,\ l \in \Lambda^\pm_{R,e})$, *тогда* $l_k^{\pm i} = \pm i\,l_k^{1/2}(C)(1+o(1)) \ \ (k\to\infty)$.

Вернемся к нашей задаче. Введем $S(l) := 2w_0 i(lI_E - 2w_0 iS_G)^{-1}$. Будем считать, что $l \notin \mathrm{I}_{w_0}$. Распишем задачу (1) в виде системы трех уравнений. При сделанном предположении относительно l из третьего уравнения можно выразить $j = S(l)\mathrm{K}_{3,1}y_0 + S(l)\mathrm{K}_{3,2}y$. Подставив это выражение в оставшиеся два уравнения, получим следующую спектральную задачу в гильбертовом пространстве $\tilde{\mathrm{H}} := H_0 \oplus H$:

$$\left(l^2\tilde{\mathrm{T}} - lm\tilde{\mathrm{P}} - l\,2w_0 iR(l) + \tilde{\mathrm{B}}\right)z = 0, \quad z := (y_0, y)^t \in \tilde{\mathrm{H}} = H_0 \oplus H,$$

$$\tilde{\mathrm{T}} := diag(T, A_{2,2}), \quad \tilde{\mathrm{B}}_{1,1} := B, \quad \tilde{\mathrm{B}}_{2,2} := I_H, \quad \tilde{\mathrm{B}}_{1,2} := -Q^*, \quad \tilde{\mathrm{B}}_{2,1} = -Q, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathrm{P}} := diag(I_0, 0), \quad R_{i,j}(l) := \mathrm{K}_{i,j} + \mathrm{K}_{i,3}S(l)\mathrm{K}_{3,j} \quad (i,j = 1,2).$$

Справедливо следующее

Предложение 2. *Для любого достаточно малого* $e > 0$ *существует достаточно большое* $R = R(e)$ *такое, что спектральная задача (1) имеет ветвь собственных значений* $\left\{l_k^\infty\right\}_{k=1}^\infty$, *расположенных в секторе* $\Lambda_{R,e}$, *со следующей асимптотикой*

$$l_k^\infty = m\,l_k\left(T^{-1}\right)\left(1 + o(1)\right) \quad (k \to \infty). \qquad (7)$$

Доказательство. Обозначим $D(l) := I_H + l^2A_{2,2} - l\,2w_0 iR_{2,2}(l)$. Докажем, что в области $\Lambda_{R,e}$, при достаточно большом радиусе $R = R(e)$, оператор-функция $D(l)$ обратима и обратная оператор-функция равномерно ограничена. Запишем $D(l)$ в виде

$$\begin{aligned} &D(l) = (I_H - il A_{2,2}^{1/2})(I_H - G_{0,0}(l))(I_H + il A_{2,2}^{1/2}), \\ &G_{0,0}(l) := l\,2w_0 i(I_H - il A_{2,2}^{1/2})^{-1}R_{2,2}(l)(I_H + il A_{2,2}^{1/2})^{-1}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Очевидно, что крайние скобки в выражении для $D(l)$ обратимы и обратные равномерно ограничены в области $\Lambda_{R,e}$ (лемма 1). Остается показать, что $\left\|G_{0,0}(l)\right\| \to 0$ при $l \to \infty$ $l \in \Lambda_{R,e}$. Пусть $X := A_{2,2}^{-1/2}\widetilde{B}^{-1/2}$. Рассмотрим произведение $X^*X = \widetilde{B}^{-1/2}A_{2,2}^{-1}\widetilde{B}^{-1/2} = C_{2,2} \in L(H)$. Отсюда следует, что оператор X ограничен. Оценим теперь норму оператор-функции $G_{0,0}(l)$. Учитывая вид $R_{2,2}(l)$ и $K_{2,2}$ имеем

$$\left\|G_{0,0}(l)\right\| \le |l|2w_0\left\{\left\|\left(I_H - ilA_{2,2}^{1/2}\right)^{-1}A_{2,2}^{1/4}\left(A_{2,2}^{1/4}XS_{2,2}X^*A_{2,2}^{1/4}\right)\right\|\cdot\left\|\left(I_H + ilA_{2,2}^{1/2}\right)^{-1}A_{2,2}^{1/4}\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|\left(I_H - ilA_{2,2}^{1/2}\right)^{-1}K_{2,3}\right\|\cdot\left\|S(l)\right\|\cdot\left\|K_{3,2}\left(I_H + ilA_{2,2}^{1/2}\right)^{-1}\right\|\right\} = o(1),\ l \to \infty,\ l \in \Lambda_{R,e} \quad (9)$$

Здесь использовалась лемма 1, а также свойство $\left\|S(l)\right\| = O(|l|^{-1})$.

Будем считать далее, что $R = R(e)$ выбрано так, что $\left\|G_{0,0}(l)\right\| < 1$ при $l \in \Lambda_{R,e}$, тогда из второго уравнения в (6) можно выразить

$$y = l2w_0iD^{-1}(l)R_{2,1}(l)y_0 + D^{-1}(l)Qy_0. \quad (10)$$

Подставив (10) в первое уравнение из (6) и поделив полученное выражение на $-lm$, получим следующую спектральную задачу:

$$l_0(l)y_0 := (I_0 - lm^{-1}T - G_0(l))y_0 = 0, y_0 \in H_0, \quad (11)$$

$$\begin{gathered} G_0(l) := (lm)^{-1}B - 2w_0im^{-1}R_{1,1}(l) - (lm)^{-1}Q^*D^{-1}(l)Q - \\ - 2w_0im^{-1}Q^*D^{-1}(l)\times R_{2,1}(l) - 2w_0im^{-1}R_{1,2}(l)D^{-1}(l)Q + \\ + l4w_0^2m^{-1}R_{1,2}(l)D^{-1}(l)R_{2,1}(l). \end{gathered} \quad (12)$$

Для того чтобы применить к пучку $l_1(l)$ теорему Маркуса-Мацаева об асимптотике собственных значений (см. [3]) нужно доказать, что $G_0(l) = G_{0,1} + G_{0,2}(l)$, где $G_{0,1} \in S_\infty$, $\left\|G_{0,2}\right\| \to 0$ при $l \to \infty$, $l \in \Lambda_{R,e}$. Очевидно, что в (11), учитывая вид $R_{1,1}(l)$ и свойства $S(l)$, в оценке нуждаются лишь последние три слагаемых. Оценим пятое слагаемое:

$$\begin{gathered} \left\|2w_0im^{-1}R_{1,2}(l)D^{-1}(l)Q\right\| \le 2w_0m^{-1}\left\|R_{1,2}(l)\right\|\cdot\left\|\left(I_H + ilA_{2,2}^{1/2}\right)^{-1}\right\| \times \\ \times\left\|\left(I_H - G_{0,0}(l)\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\left(I_H - ilA_{2,2}^{1/2}\right)^{-1}Q\right\| = o(1) \quad l \to \infty, \quad l \in \Lambda_{R,e}. \end{gathered} \quad (13)$$

Здесь использована лемма 1. Аналогично оценивается четвертое слагаемое. Оценим шестое слагаемое, учитывая вид $R_{1,2}(l)$, $R_{2,1}(l)$:

$$\left\|l4w_0^2m^{-1}R_{1,2}(l)D^{-1}(l)R_{2,1}(l)\right\| \le$$

$$\le |l|4w_0^2\left\{\left\|(\check{S}_{1,2} - Q^*\check{S}_{2,2})D^{-1}(l)(\check{S}_{2,1} - \check{S}_{2,2}Q)\right\| + \left\|K_{1,2}D^{-1}(l)K_{2,3}S(l)K_{3,1}\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|K_{1,3}S(l)K_{3,2}D^{-1}(l)(K_{2,1} + K_{2,3}S(l)K_{3,1})\right\|\right\} = o(1). \quad (14)$$

Здесь первое слагаемое оценено по лемме 1, с учетом структуры операторов $S_{i,j}(i, j = 1,2)$, свойств оператор-функции $D(l)$ и оператора X (см. аналогичные рассуждения в (9)). Последние два слагаемых оценены по лемме 1 с учетом компактности операторов $K_{2,3}$, $K_{3,2}$ и оценки $\|S(l)\| = O(|l|^{-1})$ при $l \to \infty$.

Из (13-14) и из формулы для $R_{1,1}(l)$ следует, что для оператор-функции $G_0(l)$ справедливо представление $G_0(l) = G_{0,1} + G_{0,2}(l)$, где $G_{0,1} = -2w_0 i m^{-1} K_{1,1} \in S_\infty$, $G_{0,2}(l) \to 0$ при $l \to \infty$, $l \in \Lambda_{R,e}$.

Применив к задаче (11) теорему Маркуса-Мацаева получим (7).

Предложение 3. *Для любого достаточно малого $e > 0$ существует достаточно большое $R = R(e)$ такое, что спектральная задача (1) имеет две ветви собственных значений $\{l_k^{\pm i}\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных в секторах $\Lambda_{R,e}^{+}$ и $\Lambda_{R,e}^{-}$, со следующей асимптотикой*

$$l_k^{\pm i} = \pm i\, l_k^{1/2}\left(C^{-1}\right)\left(1 + o(1)\right) \quad (k \to \infty). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим $K(l) := I_0 - l m^{-1} T - (l m)^{-1} B + 2w_0 i \times$ $\times m^{-1} R_{1,1}(l)$. Оператор-функция $K(l)$ обратима, а обратная равномерно ограничена в областях $\Lambda_{R,e}^{\pm}$ при достаточно большом R. Зафиксировав такое $R = R(e)$, из первого уравнения в (6) выразим

$$y_0 = -2w_0 i m^{-1} K^{-1}(l) R_{1,2}(l) y - m^{-1} K^{-1}(l) Q^* y\ . \tag{16}$$

Подставив (16) во второе уравнение из (6) получим задачу:

$$l_2(l) y := (I_H + l^2 A_{2,2} - G_1(l)) y = 0, y \in H, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} G_1(l) := {} & l\, 2w_0 i R_{2,2}(l) - 2w_0 i m^{-1} Q K^{-1}(l) R_{1,2}(l) - m^{-1} Q K^{-1}(l) Q^* + \\ & + l\, 4w_0^2 m^{-1} R_{2,1}(l) K^{-1}(l) R_{1,2}(l) - l\, 2w_0 i m^{-1} R_{2,1}(l) K^{-1}(l) Q^*. \end{aligned} \tag{18}$$

Далее оценивается соответствующая оператор-функция $T(l)$ из леммы 2. Из-за недостатка места мы опускаем доказательство.

Отметим здесь, что в данной задаче каждая точка непрерывного спектра может быть предельной для некоторой ветви собственных значений, однако этот факт требует дополнительного исследования.

Автор выражает благодарность научному руководителю Копачевскому Н. Д. за поддержку и внимательное отношение к работе.

Список использованной литературы

1. Закора Д.А. Малые движения частично диссипативной вращающейся гидросистемы: – Симферополь.: Ученые записки СГУ. 1998, т. 44, № 5, С. 51–55.

2. Закора Д.А. Малые движения частично диссипативной гидродинамической-системы: // Динам. системы. – 1999. – Вып.15. – С. 149–154.
3. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука., 1989. – 416 с.
4. Радзиевский Г.В. Квадратичный пучок операторов. – Киев: Препринт Ин-та матем. АН УССР., 1976.
5. Оразов М.Б. О локализации спектра в задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Журнал вычислит. математики и математической физики. –1985.– Т. 25, № 3. – С. 403–412.

Поступила в редколлегию 12.06.2000