не, а затем превалировать начинает вертикальная составляющая скорости. Это приводит уже к увеличению вектора результирующей скорости.

Следовательно, задача оптимизации состоит в определении момента времени и потери высоты, на которой результирующая скорость будет минимальна, с тем, чтобы в этот момент обеспечить посадку объекта. Правда, при этом углом q подхода объекта к поверхности варьировать в нужных пределах уже достаточно сложно.

Отметим, что основным проблемным вопросом при использовании ПТП является вопрос обеспечения требуемой ориентации и стабилизации системы объект - ПТП в спутном следе носителя.

В заключение сделаем краткие выводы по результатам выполненной работы.

1. Получена приближенная безразмерная зависимость потери скорости от безразмерного времени протекания процесса низковысотного десантирования.

2. На базе полученной зависимости предложена методика оценки режимов низковысотного десантирования грузов.

Список использованной литературы

1. Лобанов Н.А. Основы расчета и конструирования парашютов. М.: Машиностроение, 1995. – 364с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. М.: Наука, 1976.– 576с.

Поступила в редколлегию 17.08.2001 г.

УДК 517.926.22

О. В. АНАШКИН, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье предлагается развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости дискретных процессов, описываемых разностными уравнениями с запаздыванием. Новый подход излагается на примере линейного неавтономного уравнения, но может быть распространен и на нелинейные разностные уравнения. Приводится иллюстративный пример, демонстрирующий зависимость характера устойчивости от величины запаздывания.

1. Постановка задачи. Пусть $\mathbf{Z}$ есть множество всех целых чисел, $\mathbf{N} = \{1,2,...\} \subset \mathbf{Z}$ – множество натуральных чисел, $J[a,b]$ – множество всех целых чисел, содержащихся в отрезке $[a,b]$. Обозначим

$\mathsf{M}_\mathsf{p} = \{j : J[-p,0] \to \mathbf{R}^n\}$ множество отображений $J[-p,0]$ в вещественное евклидово пространство n-векторов $\mathbf{R}^n$. Очевидно, что любое такое отображение определяется заданием вещественной $n \times (p+1)$-матрицы $j = (j(-p)\ \mathbf{L}\ j(0))$. Введем в пространстве M_p норму $\|j\| = \max\{|j(-p)|,...,|j(0)|\}$, где $|\cdot|$ – некоторая норма в $\mathbf{R}^n$. Для данной последовательности $x : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^n$, $k\ \mathbf{a}\ x(k)$, будем обозначать $x[k]$ элемент пространства M_p, определенный как $x[k](s) = x(k+s)$, $s \in J[-p,0]$.

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости дискретных процессов является метод функций Ляпунова [1, 2]. Целью настоящей работы является распространение подхода, развитого автором ранее для задачи об устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений [3 – 5], на разностные уравнения с запаздыванием. Для наглядности изложения описание предлагаемого подхода дается для случая линейного уравнения, но эта же методика может быть применена и для исследования устойчивости нелинейных уравнений.

Рассмотрим неавтономное линейное разностное уравнение *запаздывающего типа* в стандартной форме

$$\Delta x(k) = mL(k, x[k]), \qquad k = s, s+1, \dots, \tag{1}$$

где $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$, $s \in \mathbf{Z}$, $m \in [0, m^*]$ – малый неотрицательный параметр, функция $L : \mathbf{Z} \times \mathsf{M}_\mathsf{p} \to \mathbf{R}^n$ линейна по второму аргументу и существует постоянная $L_0 > 0$ такая, что

$$|L(k, j)| \le L_0 \|j\| \text{ для всех } k \in \mathbf{Z} \text{ и } j \in \mathsf{M}_\mathsf{p}. \tag{2}$$

Обозначим $x(s, j, m) : k\ \mathbf{a}\ x(k; s, j, m)$ дискретный процесс – решение уравнения (1) с начальной функцией $j \in \mathsf{M}_\mathsf{p}$. При наших предположениях любое решение уравнения (1) неограниченно продолжаемо вправо.

2. Предварительные оценки. Для сокращения записи обозначим

$$x(k+s) = x(k+s; s, j, m), \quad x[k+s] = x(s, j, m)[k+s], \ k = 0,1,\dots.$$

Из (1) и (2) легко вывести следующие априорные оценки, равномерные по $s \in \mathbf{Z}$, $j \in \mathsf{M}_\mathsf{p}$:

$$|x(k+s)| \le \|x[k+s]\| \le \|j\|(1+mL_0)^k, \tag{3}$$

$$|x(k+s) - x(s)| \le m\|j\|E_k, \quad E_k = E_k(m) = L_0 \sum_{s=0}^{k-1} (1+mL_0)^s. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение множество

$$K_R^p = \{j \in \mathsf{M}_\mathsf{p} : \|j\| \le R|j(0)|\}.$$

Поскольку $l j \in K_R^p$ для любых $l \in \mathbf{R}$ и $j \in K_R^p$, то K_R^p является невыпуклым конусом. Особый интерес с точки зрения задачи устойчивости представляет множество $K_1^p = \{\varphi \in \mathrm{M}_p : \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$. Очевидно, что $K_1^p \subset K_{R_1}^p \subset K_{R_2}^p$ при $1 < R_1 < R_2$. Можно показать, что

— $x[k] \in \mathrm{M}_p$ может возрастать по норме лишь тогда, когда $x[k] \in K_1^p$;

— если $x[k] \notin K_1^p$ при $k \geq k_0$, то $\|x[k]\| \leq \|x[k_0]\|$, при этом $\|x(k)\| \to 0$ при $k \to \infty$, если $x[k]$ находится вне конуса K_R^p для $R > 1$.

Важную роль в нашем подходе играет свойство инвариантности конуса K_R^p с $R > 1$ относительно траекторий уравнения (1), точнее, имеет место следующая

Лемма. *Пусть* $x[k_0] = x(s, \varphi, m)[k_0] \in K_R^p$ *при некотором* $k_0 \geq s$. *Тогда* $x[k] \in K_R^p$ *при всех* $k \in J[k_0 + p, \infty)$ *и* $0 < m \leq m_R$, *где*

$$m_R = \frac{1}{L_0}\left[\left(\frac{R-1}{(R+1)R} + 1\right)^{\frac{1}{2p}} - 1\right]. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $x(k) = x(k; s, \varphi, m)$, $x[k] = x(s, \varphi, m)[k]$, $k = s, s+1, \ldots$. Поскольку $x[k_0] \in K_R^p$, то $\|x[k_0]\| \leq R|x(k_0)|$. Учитывая последнее неравенство и оценку (4), получим для любого $s = 1, 2, \ldots$

$$|x(k_0 + s)| \leq |x(k_0)|(1 + mRE_s), \tag{6}$$

$$|x(k_0 + s)| \geq |x(k_0)|(1 - mRE_s). \tag{7}$$

Эти неравенства справедливы для всех $k_0 \geq s$ и $x[k_0] \in K_R^p$. Поэтому при $k_0 + p \leq k \leq k_0 + 2p$ из (6), (7) следует

$$\frac{\|x[k]\|}{|x(k)|} \leq \frac{1 + mRE_{k-k_0}}{1 - mRE_{k-k_0}} \leq \frac{1 + mRE_{2p}}{1 - mRE_{2p}}. \tag{8}$$

Обозначим $e = mE_{2p}(m)$. Из (4) получаем представление: $e = (1 + mL_0)^{2p} - 1$. Решая неравенство $1 + eR \leq R(1 - eR)$, найдем $e \leq e_R = \dfrac{R-1}{(R+1)R}$. Разрешив уравнение $e_R = (1 + m_R L_0)^{2p} - 1$ относительно m_R, получим (5). Таким образом, при $m \in (0, m_R]$ правая часть (8) не превышает R и, следовательно, $x[k] \in K_R^p$ при $k \in J[k_0 + p, k_0 + 2p]$.

Поскольку $x[k_0 + p] \in K_R^p$, то в силу (6) – (8) $x[k] \in K_R^p$ и при $k \in J[k_0 + 2p, k_0 + 3p]$, а значит $x[k] \in K_R^p$ при $k \in J[k_0 + lp, k_0 + (l+1)p]$ для любого $l = 1, 2, \ldots$. Лемма доказана.

Лемма гарантирует, что $x[k]\in K_R^p$ при $k\ge k_0+p$. Из оценок (4), (6) и (7) следует, что при $k_0<k<k_0+p$ и $m\in(0,m_R]$

$$\frac{\|x[k]\|}{|x(k)|}\le\frac{\|x[k_0]\|}{(1-mRE_{p-1})|x(k_0)|}\le\frac{R}{1-mRE_{p-1}}\le R_1=\frac{R}{1-m_R RE_{2p}(m_R)}=\frac{R(R+1)}{2}.$$

Поэтому для любого наперед заданного $R>1$ при достаточно малом $m>0$ траектория $x[k]\in \mathsf{M}_\mathsf{p}$ решения уравнения (1), попав однажды в конус K_R^p, остается там вечно.

3. Основные результаты. Исследование устойчивости разностного уравнения будем проводить путем конструирования функции Ляпунова $v:\mathbf{Z}\times\mathsf{M}_\mathsf{p}\times[0,m^*]\to\mathbf{R}$, удовлетворяющей определенным требованиям. При этом в отличие от классического подхода, изложенного, например, в [1, 2], допускается немонотонное изменение функции Ляпунова вдоль решения уравнения.

Для формулировки условий теорем об устойчивости нам потребуются следующие обозначения:

$\Delta v\big|_{(1)}(s,j,m)=v(s+1,x(s,j,m)[s+1],m)-v(s,j,m)$ – первая разность вперед функции $v(s,j,m)$ в силу уравнения (1);

K – множество всех непрерывных неубывающих функций $a:[0,\infty)\to[0,\infty)$ таких, что $a(0)=0$ и $a(g)>0$ при $g>0$ (*класс Хана* [2]);

$\mathsf{B}_H^q=\{j\in\mathsf{M}_\mathsf{q}:\|j\|<H\}$ – шар радиуса H с центром в нуле в пространстве M_q;

e_x – функция-константа из M_q, тождественно равная $x\in\mathbf{R}^n$, т.е. $e_x(s)=x$, $-q\le s\le 0$.

Заметим, что начальная функция j из пространства M_p может рассматриваться также и как элемент пространства M_q, где $q\ge p$, если доопределить j так, что $j(s)=j(-p)$ при $s\in J[-q,-p)$. При этом норма $\|j\|$ остается неизменной.

Теорема 1.

Предположим, что для некоторых постоянных $q\ge p$, $H>0$ *и* $R>1$ *существуют функции* $v,\Phi:\mathbf{Z}\times(K_R^q\ \mathbf{I}\ \mathsf{B}_H^q)\times[0,m^*]\to\mathbf{R}$, *непрерывные по* m *в точке* $m=0$ *равномерно относительно* s *и* j, *и такие, что для* $s\in\mathbf{Z}$, $j\in K_R^q\ \mathbf{I}\ \mathsf{B}_H^q$ *и* $m\in[0,m^*]$ *выполнены условия:*

1) существуют функции $a,b,c\in\mathsf{K}$ *такие, что*

а) $\Delta v\big|_{(1)}(s,j,m)\le c(m)\Phi(s,j,m)$, *b)* $a(|j\,(0)| \le v(s\,,j\,,m) \le b(\|j\,\|)$;

2) существуют постоянные $C_0 > 0$ *и* $d > 1$ *такие, что* $|\Phi(s\,,j\,,m)| \le C_0\|j\,\|^d$ *и* $|\Phi(s\,,j\,,m) - \Phi(s\,,y\,,m)| \le C_0 r^{d-1}\|j\,- y\,\|$ *для всех* $j\,,y\, \in \mathrm{B}_r^q\ \mathbf{I}\ K_R^q$ *и* $r \in (0,H)$;

3) существуют постоянные $d > 0$ *и* $T \in \mathbf{N}$ *такие, что для любых* $k_0 \in \mathbf{Z}$, $j\,(0)$: $|j\,(0)| < H$, $m \in (0,m^*)$ *и* $N \in J[T,\infty)$

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+N-1} \Phi(s,e_{j\,(0)},m) \le -2d\,|j\,(0)|^d N\,.$$

Тогда найдется $m_0 > 0$ *такое, что при* $m \in (0,m_0)$ *уравнение* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 2.

Предположим, что для некоторых $q \ge p$, $s \in \mathbf{Z}$, $H > 0$ *и* $R > 1$ *существуют функции* $v(k,j\,,m)$, $\Phi(k,j\,,m)$ *непрерывные по* m *в точке* $m = 0$ *равномерно относительно* $k \ge s$ *и* $j\, \in K_R^q\ \mathbf{I}\ \mathrm{B}_H^q$, *и такие, что для* $k \ge s$, $j\, \in K_R^q\ \mathbf{I}\ \mathrm{B}_H^q$ *и* $m \in [0,m^*]$ *выполнены условия:*

1) существуют функции $b,c \in \mathsf{K}$ *такие, что*

a) $\Delta v|_{(1)}(k,j\,,m) \ge c(m)\Phi(k,j\,,m)$;

b) для каждого $k \ge s$ *и* $h \in (0,H)$ *существует* $j\, \in K_R^q\ \mathbf{I}\ \mathrm{B}_h^q$ *такое, что* $v(k,j\,,0) > 0$;

c) $v(k,j\,,m) \le b(\|j\,\|)$;

2) функция $\Phi(k,j\,,m)$ *удовлетворяет условию 2) теоремы* 1;

3) существуют постоянные $d > 0$ *и* $T \in \mathbf{N}$ *такие, что для любых* $k_0 \ge s$, $j\,(0)$: $|j\,(0)| < H$, $m \in (0,m^*)$ *и* $N \in J[T,\infty)$

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+N-1} \Phi(s,e_{j\,(0)},m) \ge 2d\,|j\,(0)|^d N\,.$$

Тогда найдется $m_0 > 0$ *такое, что при любом* $m \in (0,m_0)$ *уравнение* (1) *неустойчиво.*

Сформулированные результаты являются разностными аналогами теорем о достаточных условиях устойчивости и неустойчивости функционально-дифференциального линейного уравнения запаздывающего типа, опубликованных в статье автора [5]. Доказательство теорем 1 и 2 проводится по схеме, примененной при доказательстве теорем об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения с запаздыванием [3]. Следует только учесть линейность уравнения (1) и наличие малого параметра.

4. Пример построения подходящей функции Ляпунова. Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием

$$\Delta x(k) = mx(k-p)\cos k,\ k = s, s+1,\dots. \tag{9}$$

За основу конструкции функции Ляпунова возьмем функцию $v_0(j) = j^2(0)$. Тогда

$$\Delta v_0\big|_{(9)} = m\Phi_0(k, x[k], m) = m[2x(k)x(k-p)\cos k + mx^2(k-p)\cos^2 k]. \tag{10}$$

Главный член этого выражения при малых значениях m имеет вид $m\Phi_0(k, x[k], 0) = m2x(k)x(k-p)\cos k$. Используя известный прием суммирования функций [6], находим сумму $\sum\limits_{s=0}^{k-1}\cos s = \dfrac{\sin(k-\frac{1}{2}) + \sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$. Следовательно, среднее значение

$$\mathrm{M}\{\Phi_0(k, e_x, 0)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\Phi_0(k+s, e_x, 0)$$

функции $\Phi_0(k, e_x, 0)$ тождественно равно нулю и $v_0(j)$ не может удовлетворять ни одной из теорем об устойчивости, сформулированных выше. В этой ситуации, также как и при исследовании дифференциального уравнения с запаздыванием [3 – 5], построим возмущение функции v_0, уничтожающее слагаемое $m\Phi_0(k, x[k], 0)$ в (10). Для этого построим *возмущенную* функцию Ляпунова

$$v_1(k, x[k]) = v_0 + mu(k, x[k]),$$

где $u(k, x[k]) = U(k)x(k)x(k-p)$, коэффициент $U(k)$ выбирается из условия: $\Delta U(k) = -2\cos k$. Положим

$$u(k, x[k]) = -\left(2\sum_{s=0}^{k-1}\cos s\right)x(k)x(k-p) = -\frac{\sin(k-\frac{1}{2}) + \sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}x(k)x(k-p).$$

Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\Delta v_1\big|_{(9)} = \Delta v_0\big|_{(9)} + m\Delta u\big|_{(9)} = m^2\Phi_1(k, x[k], m),$$

где $\Phi_1(k, x[k], 0) = \left(\cos^2 k\right)x^2(k-p) - \left(\dfrac{\sin(k-\frac{1}{2}) + \sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right)\left[x^2(k-p)\cos k + \right.$ $\left. + x(k)x(k-2p)\cos(k-d)\right]$. Теперь, принимая во внимание, что $\mathrm{M}\{\cos^2 k\} = \mathrm{M}\{\sin^2 k\} = \frac{1}{2}$, и проведя необходимые тригонометрические преобразования, получим

$$\mathrm{M}\{\Phi_1(k, e_x, 0)\} = x^2\frac{\sin(p-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Поскольку $\sin\frac{1}{2} > 0$, то знак выражения (11) совпадает со знаком $\sin(p - \frac{1}{2})$. В силу равномерной ограниченности $u(k, j)$ по $k \in \mathbf{Z}$

$$j^{2}(0)\left(1 - mR\left|U(k)\right|\right) \le v_1(k, j) = j^{2}(0) + mU(k) j(0) j(-p) \le \left(1 + mR\left|U(k)\right|\right)\left\| j \right\|^{2}$$

при $j \in K_R^{2p}$. Поэтому для любого заданного $R > 1$ при достаточно малом m функции $v_1(k, j, m)$ и $\Phi_1(k, j, m)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 о равномерной асимптотической устойчивости при $\sin(p - \frac{1}{2}) < 0$ и условиям теоремы 2 о неустойчивости при $\sin(p - \frac{1}{2}) > 0$.

Список использованной литературы

1. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1977. – 228 с.
2. Hahn W. Stability of Motion. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 446 p.
3. Анашкин О. В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т.34, №7. – С. 867 – 876.
4. Anashkin O. Stability Theorems for Nonlinear Functional Differential Equations // Mathematical and Computer Modelling. – 1998. – Vol. 28, No. 2. – P. 25 – 35.
5. Anashkin O.V. Lyapunov's Direct Method and Parametric Resonance in Linear Systems with Delay // Fields Institute Communications. – 2001. – Vol. 29. – P. 11 – 18.
6. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

Поступила в редколлегию 10.10.2001 г.