

5. Иванов Ю. Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море. // Доп. НАН України. - 1999. - №7. - С.117-120.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. - 544с.

Поступила в редколлегию 28.05.2001 г.

УДК 236.24

А.Т. БАРАБАНОВ, доктор техн. наук, С.А. КОНЕВА,
Севастоп. гос. техн. ун-т

ОБ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛООБМЕНА

Рассматривается задача теплообмена в осесимметричном теплообменном аппарате с одномерным распределением температуры. Преобразование Лапласа по времени приводит к изображениям с существенно особой точкой. Предлагается общая схема анализа и представления оригиналов с помощью функций Бесселя.

Рассматривается схема теплообменного аппарата (ТОА) с конвективным теплообменом, указанная на рисунке 1.

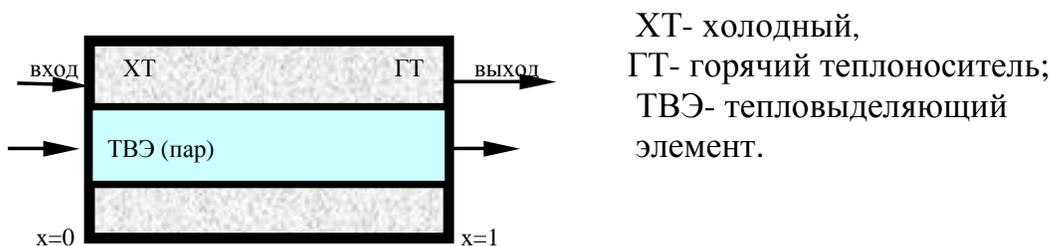


Рис. 1.- Схема теплообменного аппарата

Пусть $T(x,t)$ - температура теплоносителя в осесимметричной кольцевой полости, где x - относительная координата ($0 \leq x \leq 1$); изменение температуры в радиальном направлении не существенно; t - время; $T(0,t)$ - температура теплоносителя на входе ТОА, $T(1,t)$ - температура на выходе; $T_T(x,t)$ - температура тепловыделяющего элемента, $T_T(0,t)$ - на входе, $T_T(1,t)$ - на выходе.

При равномерной по длине цилиндра теплоотдаче уравнения динамики теплообмена имеют вид [1]:

$$v \frac{\partial T_T(x,t)}{\partial t} + T_T(x,t) = a_2 q(t) + T(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + b_1 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + b_2 T(x,t) = b_3 T_T(x,t) - b_4 G(t) \quad (2)$$

с неотрицательными постоянными коэффициентами.

Заданы граничное

$$T(0,t) = T_0(t) = 0,$$

и начальные

$$T(x,0) = 0, \quad T_T(x,0) = 0$$

условия соответственно. Заданы также расход теплоносителя $G(t)$ и интенсивность тепловыделения $q(t)$. В этой одномерной задаче теплообмена основной интерес представляет процесс изменения температуры теплоносителя на выходе ТОА $T(1,t)$.

2. Преобразование Лапласа уравнений (1), (2) по t с изображениями $T_T(x,p)$, $T(x,p)$ дает с учетом начальных условий после исключения $T_T(x,p)$ соотношение

$$\frac{dT(x,p)}{dx} + \left(b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp+1} \right) T(x,p) = \frac{a_2 b_3}{vp+1} q(p) - b_4 G(p). \quad (3)$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия $T(0,p) = T_0(p)$ позволяет определить $T(x,p)$ в виде

$$T(x,p) = T_0(p) e^{-A(p)x} + \left[\frac{a_2 b_3}{vp+1} q(p) - b_4 G(p) \right] \frac{1}{A(p)} \left[1 - e^{-A(p)x} \right], \quad (4)$$

где

$$A(p) = b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp+1}. \quad (5)$$

В соответствии с выражением (4) далее будем рассматривать три компоненты температуры теплоносителя на выходе ($x=1$)

$$T(1,p) = T_0(p) e^{-A(p)}, \quad (6)$$

$$T(1,p) = \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} \left[1 - e^{-A(p)} \right] q(p), \quad (7)$$

$$T(1,p) = \frac{-b_4}{A(p)} \left[1 - e^{-A(p)} \right] G(p), \quad (8)$$

порождаемые возмущениями $T_0(p)$, $q(p)$, $G(p)$ соответственно.

3. В соответствии с изображениями компонент температуры теплоносителя (6), (7), (8) будем рассматривать каждую компоненту температуры на выходе в виде

$$T(1,t) = \Psi(t) - \Theta(t). \quad (9)$$

Здесь первое слагаемое является интегралом обращения вида

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-jw}^{c+jw} e^{pt} \Theta(p) e^{-A(p)} dp, \quad (10)$$

где $\Theta(p)$ – дробно-рациональная функция, равная

$$\Theta(p) = T_0(p), \quad (11)$$

$$\Theta(p) = \frac{-a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} q(p), \quad (12)$$

$$\Theta(p) = \frac{b_4}{A(p)} G(p) \quad (13)$$

для (6), (7) и (8) соответственно. Второе слагаемое в (9) $\Theta(t) = 0$ для (6), а для (7), (8) является оригиналом изображения $\Theta(p)$, определяемого соотношениями (12) и (13) соответственно.

Таким образом, при дробно-рациональных изображениях $q(p)$, $G(p)$, соответствующие функции $\Theta(t)$ могут быть определены по изображениям (12), (13) любым методом обращения дробно-рациональных изображений.

Поэтому, основной интерес представляет интеграл (10). Учитывая выражение (5) для $A(p)$, найдем

$$\Psi(t) = 0, \quad t < b_1; \quad (14)$$

$$\Psi(t) = e^{-b_2} J(t - b_1), \quad t > b_1, \quad (15)$$

где

$$J(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-jw}^{c+jw} e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp. \quad (16)$$

Задача анализа оригинала (16) является существенной и нетривиальной частью всей задачи анализа температуры $T(1,t)$ на выходе ТОА.

4. Рассмотрим возможные подходы в анализе интеграла (16). Один из них состоит в выделении вычета в существенно особой точке подынтегральной функции (16). Для этого нам понадобится оценка функции $g(p) = \exp \frac{b_3}{vp+1}$.

Пусть $p = R e^{ja}$, $R = |p|$, $a = \arg p$. Тогда легко находим

$$\left| g(R e^{ja}) \right| \leq e^{\frac{b_3 (vR \cos a + 1)}{v^2 R^2 + 2vR \cos a + 1}} \leq e^{b_3 \frac{vR+1}{(vR-1)^2}}. \quad (17)$$

Таким образом, на всякой окружности радиуса R с центром в начале координат при $R \rightarrow \infty$ $\left| g(R e^{ja}) \right| \rightarrow 1$ равномерно относительно аргумента. Поскольку $\Theta(p)$ - дробно-рациональная функция, то из

этого следует, что интеграл (16) допускает применение леммы Жордана. Следовательно, его можно представить в виде

$$J(t) = \mathcal{J}(t) + m(t), \quad (18)$$

где

$$\mathcal{J}(t) = \sum \text{res } e^{pt} Q(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} \quad (19)$$

- сумма вычетов функции в полюсах изображения $\Theta(p)$, а

$$m(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp \quad (20)$$

- вычет в существенно особой точке. В (20) контур интегрирования представляет собой любую окружность с центром в существенно особой точке $p = \frac{-1}{v}$, которая не охватывает полюсы функции $\Theta(p)$.

Другими словами, если r – радиус окружности, а r – точная верхняя грань всех r , определяющих окружности с указанным условием, то в интеграле (20)

$$0 < r < r. \quad (21)$$

Прежде всего, укажем грубую асимптотическую оценку $m(t)$, которая может быть полезной при качественном анализе динамики теплообмена. Полагая в (20) $p = -\frac{1}{n} + re^{ja}$ с некоторым фиксированным r из интервала (21), легко находим

$$|m(t)| \leq e^{\frac{-1}{v}t} \frac{1}{2\pi j} \oint e^{tr \cos a} |\Theta(p)| r e^{\frac{b_3}{vr} \cos a} da \leq e^{\left(\frac{-1}{v} + r\right)t} M(r), \quad (22)$$

где

$$M(r) = r e^{\frac{b_3}{vr}} \max_{0 \leq a \leq 2\pi} \left| \Theta\left(\frac{-1}{v} + re^{ja}\right) \right|.$$

Выбирая $r < \frac{1}{n}$, получаем экспоненциально убывающую при $t \rightarrow \infty$ оценку $m(t)$. Отметим далее полезное для применений соотношения (18) следующее представление вычета (20). Выполняя экспоненциальное разложение

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad z = \frac{b_3}{v} \frac{1}{p + \frac{1}{v}}, \quad p \neq \frac{-1}{v}, \quad (23)$$

получаем для (20)

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_3}{v}\right)^k \frac{1}{k!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} e^{pt} \Theta(p) \Big|_{p=-\frac{1}{v}} = e^{\frac{-1}{v}t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_3}{v}\right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!k!} m_k(t, v), \quad (24)$$

где $m_k(t, v)$ многочлены степени k переменной t

$$\mu_0(t, v) = \alpha_0, \quad m_1(t, v) = a_0 t + a_1, \quad m_2(t, v) = a_0 t^2 + 2a_1 t + a_2, \dots \quad (25)$$

и $a_i = \Theta^{(i)}\left(\frac{-1}{v}\right)$ - значение i -ой производной $\Theta(p)$ при $p = \frac{-1}{v}$.

В связи с разложением (24) рассмотрим контурный интеграл

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint e^{pt} \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p}} dp, \quad (26)$$

где контур интегрирования охватывает точку $p=0$. При аналогичном использовании экспоненциального разложения имеем:

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{k! 2\pi j} \oint e^{pt} \frac{1}{p^{k+1}} dp = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!k!} a^k t^k = I_0(2\sqrt{at}), \quad (27)$$

где $I_0(z)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Отметим, что соотношение

$$I_0(2\sqrt{at}) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p}} \right\} \quad (28)$$

представляет собой известное табличное соответствие и успешно применяется в решении задач теплообмена [2].

Покажем, как функции Бесселя с помощью (28) могут быть введены и для рассматриваемого интеграла обращения (16). Для простоты ограничимся далее случаем постоянных возмущений, т.е. примем

$$T_0(p) = \frac{T_0}{p}, \quad q(p) = \frac{q}{p}, \quad G(p) = \frac{G}{p}, \quad (29)$$

где T_0, q, G - заданные константы.

Рассмотрим функцию изображение

$$Y(p) = \frac{1}{p-b} e^{\frac{a}{p+1}} = \frac{1}{p+1} e^{\frac{a}{p+1}} + \frac{1+b}{p-b} \frac{1}{p+1} e^{\frac{a}{p+1}}. \quad (30)$$

В силу (28) и теоремы смещения имеем

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} e^{\frac{a}{p+1}} \right\} = e^{-1t} I_0(2\sqrt{at}).$$

Применяя ко второму слагаемому теорему умножения, получаем оригинал для (30)

$$Y(t) = e^{-lt} I_0(2\sqrt{at}) + (l + b)e^{bt} \int_0^t e^{-(l+b)t} I_0(2\sqrt{at}) dt. \quad (31)$$

Отсюда при $b = 0$, $l = \frac{1}{v}$, $a = \frac{b_3}{v}$ для случая (11) следует оригинал (16)

$J(t) = T_0 J_0(t)$, где

$$J_0(t) = e^{\frac{-1}{v}t} I_0(2\sqrt{\frac{b_3}{v}t}) + \frac{1}{v} \int_0^t e^{\frac{-1}{v}t} I_0(2\sqrt{\frac{b_3}{v}t}) dt. \quad (32)$$

Для рассмотрения случаев (12), (13) заметим, что

$$A(p) = \frac{C(p)}{vp + 1}, \quad C(p) = vb_1 p^2 + (b_1 + vb_2)p + b_2 - b_3. \quad (33)$$

Таким образом, в каждом из случаев (12), (13), $\Theta(p)$ имеет три полюса $p = 0$, $p = l_1$, $p = l_2$, где l_1, l_2 нули многочлена $C(p)$. Из этого следует разложение на простые дроби (случай кратного полюса опускаем)

$$\Theta(p) = \frac{d_0}{p} + \frac{d_1}{p - l_1} + \frac{d_2}{p - l_2}, \quad (34)$$

и для оригинала (16) найдем

$$J(t) = d_0 J_0(t) + d_1 J_1(t) + d_2 J_2(t), \quad (35)$$

где выражения для $J_1(t)$, $J_2(t)$ получаем из (31) при $l = \frac{1}{v}$ и $b = l_1$, $b = l_2$ соответственно.

Замечание. Для исследования процессов теплообмена полезно отметить, что нули l_1, l_2 многочлена $C(p)$ вещественные. Причем, при $b_2 - b_3 > 0$ - оба отрицательные, при $b_2 - b_3 \leq 0$ - один отрицательный, а другой - неотрицательный.

В заключение заметим, что представление оригинала (16) с помощью функций типа (31) может быть распространено на более общий случай дробно-рациональных изображений $T_0(p), q(p), G(p)$ расширением разложений вида (34).

Список использованной литературы

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. - М.: Атомиздат. 1979.- 415 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука. 1964.- 488 с.

Поступила в редколлегию 11.10.2001 г.