5. Папкова Ю.И., Ярошенко А.А. Распространение звуковых волн в неоднородном слое жидкости // Вестник КПИ. Машиностроение. - 2000. - Т.2, Вып.38. - С.120-123.
6. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

Поступила в редколлегию 02.08.2001 г.

УДК 532.5:517.9:532

Э.И. БАТЫР, аспирант, Таврический нац. ун-т.

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Рассматривается линейная задача гидродинамики, связанная с малыми движениями системы n тел. Система представляет собой цепь последовательно соединенных твердых тел. Каждое из тел такой цепи является гиростатом. Задача решается с помощью методов функционального анализа. Формулируется теорема существования решений задачи Коши.

1. Постановка задачи. Рассматривается система n тел G_i, $i=\overline{1,n}$, последовательно сочлененных сферическими шарнирами. Тело G_1 имеет неподвижную точку O_1. Тела G_i и G_{i-1} $\left(i=\overline{2,n}\right)$ имеют общую точку O_i. Тело G_i содержит полость Ω_i, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Система совершает малые движения вблизи состояния покоя.

Введем в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ неподвижную декартову систему координат $O_1x^1x^2x^3$. Рассмотрим подвижную систему координат $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ с началом в точке O_i, жестко связанную с i телом, $i=\overline{1,n}$. Единичные векторы осей системы $O_1x^1x^2x^3$ обозначаются через $\vec{e}^{\,k}$, а осей систем $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ — через $\vec{e}_i^{\,k}$, $i=\overline{1,n}$, k=1,2,3.

Положение подвижной системы координат $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ относительно неподвижной системы координат $O_1x^1x^2x^3$ задается вектором углового перемещения $\vec{d}_i(t)$. Его длина есть угол поворота оси, направление по правилу буравчика [1]: $\vec{d}_i(t)=\sum_{k=1}^{3}d_i^k\vec{e}_i^{\,k}$.

Пусть m_i — масса i тела; $\vec{r}_i$— радиус-вектор, связывающий полюс O_i с любой точкой тела G_i; вектор $\vec{c}_i = -a_i\vec{e}_i^{\,3}$ $(a_i > 0)$ проведен из O_i в центр масс тела G_i, $i = \overline{1,n}$. Введем вектор $\vec{h}_i = \overrightarrow{O_iO_{i+1}}$, $i = \overline{1,n-1}$.

На систему действует сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Силы трения в точках O_i отсутствуют.

Линеаризованные уравнения движения системы n гиростатов таковы[2]:

$$J_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + L_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_1\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{h}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt}\right)dm_k =$$

$$= -\left(m_1a_1 + \sum_{k=2}^{n}m_kh_1\right)g\left(d_1^1\vec{e}_1^{\,1} + d_1^2\vec{e}_1^{\,2}\right) + \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1dm_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_1\times\vec{f}_kdm_k\,, \tag{1}$$

$$J_i\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} + L_i\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} + \sum_{k=i+1}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_i\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{h}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt}\right)dm_k +$$

$$+\int\limits_{G_i}\vec{r}_i\times\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j\right)dm_i = -\left(m_ia_i + \sum_{k=i+1}^{n}m_kh_i\right)g\left(d_i^1\vec{e}_i^{\,1} + d_i^2\vec{e}_i^{\,2}\right) +$$

$$+\int\limits_{G_i}\vec{r}_i\times\vec{f}_idm_i + \sum_{k=i+1}^{n}\int\limits_{G_k}\vec{h}_i\times\vec{f}_kdm_k\,,\ i = \overline{2,n-1} \tag{2}$$

$$J_n\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} + L_n\frac{\partial\vec{u}_n}{\partial t} + \int\limits_{G_n}\vec{r}_n\times\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j\right)dm_n =$$

$$= -m_na_ng\left(d_n^1\vec{e}_n^{\,1} + d_n^2\vec{e}_n^{\,2}\right) + \int\limits_{G_n}\vec{r}_n\times\vec{f}_ndm_n\,, \tag{3}$$

Здесь J_i— тензор инерции гиростата G_i в точке O_i; $\vec{f}_i$ — внешнее поле малых массовых сил, действующих на систему, записанное в i-ой подвижной системе; $\vec{\omega}_i = \frac{d\vec{\delta}_i}{dt}$— абсолютная угловая скорость тела G_i, $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t,\vec{r}_i)$ —относительная скорость жидкости. Через L_i обозначен гиростатический момент гиростата G_i в точке O_i: $L_i\vec{u}_i := \rho_i\int\limits_{\Omega_i}\vec{r}_i\times\vec{u}_id\Omega_i$, $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим теперь линеаризованные уравнения движения и краевые условия гидродинамической части задачи. В подвижной системе координат $O_i x_i^1 x_i^2 x_i^3$ уравнения для определения поля относительной скорости $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t, \vec{r}_i)$, динамического давления $p_i(t, \vec{r}_i)$, с учетом малого внешнего поля массовых сил $\vec{f}_i = \vec{f}_i(t, \bar{r}_i)$, при постоянной плотности жидкости r_i и кинематической вязкости m_i, имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{w}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\frac{1}{r_1} \nabla p_1 + m_1 \Delta \vec{u}_1 + \vec{f}_1, \quad div\, \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \frac{d\vec{w}_i}{dt} \times \vec{r}_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{d\vec{w}_k}{dt} \times \vec{h}_k = = -\frac{1}{r_i} \nabla p_i + m_i \Delta \vec{u}_i + \vec{f}_i, \quad div\, \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i)$$

$$i = \overline{2, n}. \tag{5}$$

При этом должны выполняться граничные условия:

$$\vec{u}_i = \vec{0} \;\; (на\ S_i = \partial \Omega_i) \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Добавим уравнения связи

$$\frac{d\vec{d}_i}{dt} - \vec{w}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Для полной математической формулировки задачи к уравнениям (1)—(7) следует добавить начальные условия:

$$\vec{u}_i(0, \vec{r}_i) = \vec{u}_i^{\,0}(\vec{r}_i), \; \vec{w}_i(0) = \vec{w}_i^{\,0}, \; \vec{d}_i(0) = \vec{d}_i^{\,0}, \; i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

2. Переход к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве.

Задача (1)-(8) исследуется с помощью методов функционального анализа, в частности, с помощью теории операторов в гильбертовом пространстве. Эти методы подробно рассмотрены в монографии [1].

Предположим, что при каждом *t* все члены в уравнениях Навье-Стокса (4) и (5) принадлежат пространству $L_2(\Omega_i) = J_0(\Omega_i) \oplus \boldsymbol{G}(\Omega_i)$, $J_0(\Omega_i) = \{\vec{u}_i(t, \vec{r}_i) \in \boldsymbol{L_2}(\Omega_i) \mid div \vec{u}_i = 0 \; (\Omega_i),$ $\vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \; (на\ S_i)\}$, $\boldsymbol{G}(\Omega_i) = \{\vec{u}_i(t, \vec{r}_i) \in \boldsymbol{L_2}(\Omega_i) \mid \vec{u}_i = \nabla p \; (в\ \Omega_i)\}$, $i = \overline{1, n}$. Применим к обеим частям ***i***-го уравнения оператор ортогонального проектирования P_{0i} на подпространство $J_0(\Omega_i)$, $i = \overline{1, n}$. В силу условия несжимаемости и граничных условий (6) естественно считать, что поля скоростей $\vec{u}_i(t, \vec{r}_i)$ принадлежат подпространству $\boldsymbol{J}_0^1(\Omega_i)$ [1], а значит, и подпространству $J_0(\Omega_i)$, $i = \overline{1, n}$.

После ортогонального проектирования уравнения (4) на подпространство $J_0(\Omega_1)$ получаем:

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} + \mathrm{P}_{01}\left(\frac{d\vec{w}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) = \mathrm{P}_{01}(m_1 \Delta \vec{u}_1) + \mathrm{P}_{01}(\vec{f}_1). \tag{9}$$

Расширяя оператор "$-\mathrm{P}_{01}\Delta$" до оператора Стокса A_{01} [1], приходим к абстрактному уравнению в подпространстве $J_0(\Omega_1)$:

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt}+\mathrm{P}_{01}\left(\frac{d\vec{w}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)+m_1A_{01}\vec{u}_1=\mathrm{P}_{01}\left(\vec{f}_1\right). \qquad (10)$$

Аналогично, после ортогонального проектирования уравнений (5) на соответствующие подпространства $J_0(\Omega_i)$ и расширения оператора "$-\mathrm{P}_{0i}\Delta$" до оператора Стокса A_{0i}, получим абстрактные уравнения в подпространствах $J_0(\Omega_i)$:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt}+\mathrm{P}_{0i}\left(\frac{d\vec{w}_i}{dt}\times\vec{r}_i\right)+\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{P}_{0i}\left(\frac{d\vec{w}_k}{dt}\times\vec{h}_k\right)+m_iA_{0i}\vec{u}_i=\mathrm{P}_{0i}\left(\vec{f}_i\right). \qquad (11)$$

Рассмотрим систему уравнений (1)-(3), (10), (11) и (7) как систему дифференциальных уравнений относительно вектор-столбца $\vec{v}(t):=\left(\vec{u}_1(t,\vec{r}_1),\dots,\vec{u}_n(t,\vec{r}_n),\vec{w}_1(t),\dots,\vec{w}_n(t),\vec{d}_1(t),\dots,\vec{d}_n(t)\right)^t$, считающегося функцией t со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}:=J_0(\Omega_1)\oplus\dots\oplus J_0(\Omega_n)\oplus\mathbf{C}^{6n}$. Начальные условия (8) порождают начальный элемент $\vec{v}(0):=\left(\vec{u}_1^{\,0},\dots,\vec{u}_n^{\,0},\vec{w}_1^{\,0},\dots,\vec{w}_n^{\,0},\vec{d}_1^{\,0},\dots,\vec{d}_n^{\,0}\right)^t$. Коротко эту систему можно записать в виде одного уравнения

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I & P & 0\\ P^* & J & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{w}\\ \vec{d}\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}A_0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -I & C\\ 0 & -I & -I\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{w}\\ \vec{d}\end{pmatrix}=\mathrm{F}, \qquad (12)$$

где

1.) $\vec{u}:=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)^t$, $\vec{w}:=(\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n)^t$, $\vec{d}:=\left(\vec{d}_1,\dots,\vec{d}_n\right)^t$ и начальные условия принимают вид $\left(\vec{u}(0),\vec{w}(0),\vec{d}(0)\right)^t=\left(\vec{u}^{\,0},\vec{w}^{\,0},\vec{d}^{\,0}\right)$; 2.) I - единичная матрица; 3.) элементы матрицы P имеют вид: $P_{ii}\vec{w}_i=\mathrm{P}_{0i}(\vec{w}_i\times\vec{r}_i)$, при $i=\overline{1,n}$; $P_{ki}\vec{w}_k=\mathrm{P}_{0i}\left(\vec{w}_k\times\vec{h}_k\right)$, при $k<i$, $i=\overline{1,n}$; $P_{ki}\vec{w}_k=0$, при $k>i$, $i=\overline{1,n}$; 4.) Элементы матрицы J имеют вид: $J_{ii}\vec{w}_i=J_i\vec{w}_i+\sum\limits_{k=i+1}^{n}\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_i\times\left(\vec{w}_i\times\vec{h}_i\right)d\Omega_k$,

при $i=\overline{1,n-1}$; $J_{nn}\vec{w}_n=J_n\vec{w}_n$;

$J_{ij}\vec{w}_j=\int\limits_{\Omega_i}\vec{r}_i\times\left(\vec{w}_j\times\vec{h}_j\right)d\Omega_i+\sum\limits_{k=i+1}^{n}\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_i\times\left(\vec{w}_j\times\vec{h}_j\right)d\Omega_k$, при $i>j$, $i=\overline{1,n-1}$;

$J_{ji}\vec{w}_i=\int\limits_{\Omega_i}\vec{h}_j\times\left(\vec{w}_i\times\vec{r}_i\right)d\Omega_i+\sum\limits_{k=i+1}^{n}\int\limits_{\Omega_k}\vec{h}_j\times\left(\vec{w}_i\times\vec{h}_i\right)d\Omega_k$, при $i<j$, $j=\overline{1,n-1}$;

$J_{in}\dot{w}_n = \int\limits_{\Omega_n} \vec{h}_i \times (\vec{w}_n \times \vec{r}_n) d\Omega_n$, при $i = \overline{1, n-1}$; $J_{ni}\dot{w}_i = \int\limits_{\Omega_i} \vec{r}_n \times (\vec{w}_i \times \vec{h}_i) d\Omega_i$,

при $i = \overline{1, n-1}$; 5.) $A_0 = diag\{m_1 A_{01}, ..., m_n A_{0n}\}$; 6.) Элементы матрицы C имеют вид: $C_{ij} = 0, \textit{при}\ i \neq j$;

$$C_{ii} = \left(m_i a_i g + \sum_{k=i+1}^{n} m_k h_i g \right) \left(d_i^1 \vec{e}_i^{\,1} + d_i^2 \vec{e}_i^{\,2} \right), \textit{при}\ i = \overline{1, n-1};$$

$$C_{nn} = m_n a_n g \left(d_n^1 \vec{e}_n^{\,1} + d_n^2 \vec{e}_n^{\,2} \right); \; 8.)$$

$$\vec{F}(t) = \left(\mathrm{P}_{01}(\vec{f}_1), ..., \mathrm{P}_{0n}(\vec{f}_n), \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k dm_k, ..., \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n, 0, ..., 0 \right)^t$$

Определим квадрат нормы элемента из пространства **H** по формуле

$$\|\vec{v}\|_{\mathrm{H}}^2 := \sum_{i=1}^{n} r_i \int\limits_{\Omega_i} |\vec{u}_i|^2 d\Omega_i + \sum_{i=1}^{n} |\vec{w}_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\vec{d}_i|^2 . \tag{13}$$

3. Вспомогательные предложения и основные теоремы о разрешимости начально-краевой задачи.

Предложение 1. Оператор $\tilde{\mathrm{I}} := \begin{pmatrix} I & P & 0 \\ P^* & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ задачи Коши (12) является положительно определенным ограниченным оператором в **H**.

Предложение 2. Оператор $\mathrm{A} := \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ задачи Коши (12) является самосопряженным положительно определенным неограниченным оператором в **H**.

Предложение 3. Оператор $\mathrm{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & C \\ 0 & -I & -I \end{pmatrix}$ задачи Коши (12) является линейным и ограниченным оператором в **H**.

Теорема 1. Оператор $-\tilde{\mathrm{I}}^{-1}(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ является производящим оператором аналитической полугруппы $e^{-\tilde{\mathrm{I}}^{-1}(\mathrm{A}+\mathrm{B})t}$. Если $\vec{v}^{\,0}(x) \in \boldsymbol{D}(\mathrm{A})$, $\vec{F}(t) \in \boldsymbol{C}^1([\mathbf{0,T}], \mathbf{H})$, то сильное решение задачи Коши (12) имеет вид:

$$\vec{v}(t) = e^{-\tilde{I}^{-1}(A+B)t}\,\vec{v}^{0} + \int_{0}^{t} e^{-\tilde{I}^{-1}(A+B)(t-t)}\vec{F}(t)\,dt\,. \qquad (14)$$

Применив к (4) оператор ортогонального проектирования $I - P_{01}$ на подпространство $\boldsymbol{G}(\Omega_1)$, получим:

$$(I - P_{01})\left(\frac{d\vec{w}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right) = -\frac{1}{r_1}\nabla p_1 + m_1(I - P_{01})\Delta\vec{u}_1 + (I - P_{01})\,\vec{f}_1. \qquad (15)$$

Если найдено решение задачи Коши (12), то, подставив в (15) значения полей $\vec{u}_1$ и $\vec{w}_1$, находим поле давлений ∇p_1.

Аналогичным образом, применяя к уравнениям (5) оператор ортогонального проектирования $I - P_{0i}$ на подпространство $\boldsymbol{G}(\Omega_i)$, зная значения полей $\vec{u}_i$ и $\vec{w}_i$, можно найти поле давлений ∇p_i, $i = \overline{2,n}$.

Теорема 2. Если выполнены условия:

а) $\vec{u}_i^{\,0} \in \boldsymbol{D}(A_{0i}) \subset \boldsymbol{J}_0^1(\Omega_i) \subset \boldsymbol{J}_0(\Omega_i)$, $\vec{w}_i^{\,0} \in \boldsymbol{C}^3$, $\vec{d}_i^{\,0} \in \boldsymbol{C}^3$, $i = \overline{1,n}$; б**)** поле внешних сил $\vec{f}_i(t,x)$ есть непрерывно дифференцируемые функции t со значениями в $L_2(\Omega_i)$, $i = \overline{1,n}$;

то исходная начально-краевая задача имеет единственное сильное решение, для которого поля $\{\vec{u}_1(t,\vec{r}_1),\dots,\vec{u}_n(t,\vec{r}_n),\vec{w}_1(t),\dots,\vec{w}_n(t),\vec{d}_1(t),\dots,\vec{d}_n(t)\}$ непрерывно дифференцируемы по t и принимают значения из $\mathbf{H}$, поля $(\nabla p_i)(t)$ непрерывны в $\boldsymbol{G}(\Omega_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Список использованной литературы

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. —К.: Наук. думка, 1978. —296 с.
3. Батыр Э.И. Малые движения и нормальные колебания двойного маятника с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость: // Динам. системы.- 2000.-Вып.16.С.149-155.
4. Ишлинский А.Ю. Механика относительного движения и силы инерции.— М.: Наука, 1981. — 191 с.

Поступила в редколлегию 03.07.2001 г.