УДК 517. 956.4

Е. П. БЕЛАН, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

О БИФУРКАЦИИ БЕГУЩИХ ВОЛН В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Исследована задача бифуркации периодических структур, рождающихся из пространственно-однородного стационарного решения параболического уравнения с малой диффузией и преобразованием поворота пространственной координаты. Рассматриваемое уравнение возникает при моделировании процессов самовоздействия светового поля в оптическом резонаторе с распределенной обратной связью. Изучаемый случай представляет интерес в связи с анализом природы оптической турбулентности. Установлено, что в двухпараметрическом семействе рассматриваемых уравнений при прохождении параметров через критическую линию из неустойчивой бегущей волны рождается устойчивая бегущая волна и неустойчивый бегущий тор с постоянным векторным полем на нем. Тор находится на сепаратрисном многообразии, которое разделяет области устойчивости двух бегущих волн.

1. На окружности $S = R/2\pi \mathrm{Z}$ рассмотрим уравнение

$$\dot{u} + u = \mu u'' + K(1 + \gamma \cos u_\eta) \tag{1}$$

с малым параметром $\mu > 0$. Это уравнение служит моделью при анализе динамики светового пучка в виде тонкого кольца при повороте поля на угол η в контуре обратной связи вокруг оптической оси [1]. В (1) $u(t,\theta)$- фаза световой волны, $u_\eta(t,\theta) = u(t,\theta + \eta)$, $K > 0$ - коэффициент пропорциональный интенсивности светового потока, $0 < \gamma \le 1$ - видность интерференционной картины. Случай малой диффузии представляет интерес в свете экспериментально обнаруженного распада структур при уменьшении коэффициента диффузии частиц нелинейной среды.

Качественные свойства периодических структур аналогичного (1) уравнения изучены в [2]. Анализ бифуркации периодических структур проводится далее при отличных от [2] условиях.

2. В качестве фазового пространства уравнения (1) возьмем пространство Соболева $H^1(S)$.

Пусть w пространственно-однородное состояние равновесия (1).

Условие 1. $\eta = \acute{\eta} + \nu$, где $\acute{\eta} = 2\pi\, p/q$, p/q-- несократимая дробь.

Обозначим $\Lambda = -Kg\sin w$. Предположим, что $\Lambda < -1$, $0 < \acute{h} < p$.

Условие 2. Существуют такие целые $m^+, m^-, 0 < m^+ < m^- < q$, что $\max\limits_{0<k<q} Re(-1 + \mathrm{L}\, exp(ik\acute{h})) = Re(-1 + \mathrm{L}\, exp(im^{\pm}\acute{h})) = 0.$

Из условия 2 следует

$$Im(-1 + \mathrm{L}\, exp(im^+\acute{h})) = -Im(-1 + \mathrm{L}\, exp(im^-\acute{h})) = w_0 \neq 0.$$

Заменой $u = w + v$ перейдем к уравнению

$$dv/dt = L(m,n)v + R(v_h, m,n), \tag{2}$$

$L(m,n)v = mv'' - v - Kg\sin wv_h$, $R(v,m) = Kg[\cos(w+v) - \cos w + v\sin w]$.

Собственной функции $q^k = \exp(ikq)$ оператора $L(m,n)$ соответствует собственное значение

$$l_k = -mk^2 - 1 + \Lambda\exp(ikh), \quad k = 0, \pm 1, \mathbf{K}.$$

Обозначим

$$c_1 = 2^{-1} exp(im^+\acute{h})(-\mathrm{L} + (\mathrm{L}ctgw)^2(2(1-\mathrm{L})^{-1} +$$
$$+ exp(2im^+\acute{h})(2iw_0 + 1 - \mathrm{L}\, exp(2im^+\acute{h}))^{-1}),$$
$$a_s = a_s(m,n) = m(m^+ + sq)^2 + n\,\mathrm{L}(m^+ + sq)sin\, m^+\acute{h}, \quad s = 0,1,\mathbf{K}.$$

При рассматриваемых условиях $\mathrm{Re}\, c_1 < 0$.

Теорема. *Пусть $sin\, m^+\acute{h} > 0$. Существует такое $d_0 > 0$ и область*

$Q = \{(m,n) : m > 0, n > 0, \|(m,n)\| < d_0, a_1 + o(m,n) < 0, a_2 + o(m,n) > 0\}$,

такая, что при $(m,n) \in Q$ (2) имеет периодические по t решения $v_0(h_0, m,n)$, $(h_0 = w^0(m,n)t + m^+q)$, $v_1(h_0, m,n)$, $(h_1 = w^1(m,n)t + (m^+ + q)q)$,

$$v_0 = (a_0 / \mathrm{Re}c_1)^{1/2} 2\cos h_0 + O(\|(m,n)\|), \tag{3}$$

$$v_1 = (a_1 / \mathrm{Re}c_1)^{1/2} 2\cos h_1 + O(|(m,n)|), \tag{4}$$

где $w^s(m,n) = w_0 + O(\|(m,n)\|)$, $s = 0,1$.

Существует область $Q' \subset Q$, точки которой удовлетворяют условию $2|a_1(m,n)| < |a_0(m,n)| + o(\|(m,n)\|)$, такая, что при $(m,n) \in Q'$ решение v_0 является орбитально асимптотически устойчивым, v_1 неустойчиво. Пусть область Q'' является дополнением Q' до Q, то-есть $\overline{Q'} \cup \overline{Q''} = \overline{Q}$.

Тогда при $(m,n) \in Q''$ решения v_0, v_1 являются орбитально асимптотически устойчивыми. Уравнение (2) при $(m,n) \in Q''$ имеет решение $v_{0,1}(j_0, j_1, m,n)$, $(j_0 = w_{0,1}(m,n)t + m^+q$, $j_1 = w_{1,0}(m,n)t + (m^+ + q)q)$,

$$w_{0,1} = w_0 + O(\| m,n \|),\; w_{1,0} = w_0 + O(\| m,n \|),$$

$$v_{0,1} = 2r_0^{\;1/2}\cos j_0 + 2r_1^{\;1/2}\cos j_1 + O(\| m,n \|), \qquad (5)$$

где $r_i = r_i(m,n), \quad i = 0,1$ *удовлетворяют системе*

$$r_0 \operatorname{Re} c_1 + r_1 2 \operatorname{Re} c_1 = a_0,$$

$$r_0 2 \operatorname{Re} c_1 + r_1 \operatorname{Re} c_1 = a_1.$$

Решение $v_{0,1}$ *неустойчиво. Нулевое решение уравнения* **(2)** *неустойчиво. Периодических и квазипериодических решений отличных от указанных* **(** *с точностью до сдвигов***)** *уравнение* **(2)** *в окрестности нуля не имеет.*

Доказательство. Применим к (2) формализм метода центральных многообразий инвариантных относительно группы вращения $q \to q + a, a \in R(\operatorname{mod} 2p)$ [3], [4], [5]. С этой целью положим

$$v = z_1 q_0 + \bar z_1 \bar q_0 + z_2 q_1 + \bar z_2 \bar q_1 + s\,(z_1 q_0, \bar z_1 \bar q_0, z_2 q_1, \bar z_2 \bar q, m, n), \qquad (6)$$

где $q_0 = \exp(im^+ q)$, $q_1 = \exp(i(m^+ + q)q)$, а z_1, z_2 удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= l^1 z_1 + f_1(z_1, \bar z_1, z_2, \bar z_2, m, n), \\ \dot z_2 &= l^2 z_1 + f_2(z_1, \bar z_1, z_2, \bar z_2, m, n). \end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь $l^1 = l_{m^+}(m,n), \quad l^2 = l_{m^+ + q}(m,n)$. Положим $s = s_2 + s_3 + \mathbf{K}$, где $s_2, s_3, \mathbf{K}$ однородные многочлены относительно $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}$ степени соответственно 2,3,…. Подставляя (6), (7) в (2), получим рекуррентную последовательность линейных дифференциальных уравнений относительно $s_2, s_3, \mathbf{K}$. Разрешая уравнение относительно s_2, получим

$$s_2 = 2^{-1} \sum_{|a|=2} s_a x^a, \;\; s_a = -\cos w K g\,[i(w,a) - l_{(m,a)}]^{-1} \exp(i(m,a)),$$

где $w = (w_0, -w_0, w_0, -w_0), \quad m = (m^+, -m^+, m^+ + q, -m^+ - q)$. Условие разрешимости уравнения относительно s_3 приводит к равенству

$$f_1 = z_1(c_1 z_1 \bar z_1 + 2c_1 z_2 \bar z_2 + \mathbf{K}), \quad f_2 = z_2(2c_1 z_1 \bar z_1 + c_1 z_2 \bar z_2 + \mathbf{K}).$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_1(l^1 + c_1 z_1 \bar z_1 + 2c_1 z_2 \bar z_2), \\ \dot z_2 &= z_2(l^2 + 2c_1 z_1 \bar z_1 + c_1 z_2 \bar z_2). \end{aligned} \qquad (8)$$

Положим $z_1 \bar z_1 = r_1, \quad z_2 \bar z_2 = r_2$. Относительно r_1, r_2 получим систему в четверти плоскости, которая отличается от системы

$$\begin{aligned} \dot r_1 &= 2 r_1(-a_0(m,n) + \operatorname{Re} c_1\, r_1 + 2 \operatorname{Re} c_1\, r_2), \\ \dot r_2 &= 2 r_2(-a_1(m,n) + 2 \operatorname{Re} c_1\, r_1 + \operatorname{Re} c_1\, r_2) \end{aligned} \qquad (9)$$

членами, имеющими более чем первый порядок малости по (m,n). Эта система является системой Лотка - Вольтерра легкого типа. Бифуркационные диаграммы и перестройки в таких семействах приведены в [6], [7]. Состояниям равновесия $(a_0/\mathrm{Re}c_1,0), (0,a_1/Rec_1)$ соответствуют бифурцирующие из нуля периодические решения системы (8). Очевидно, что

$$\breve{v}_0 = x_0 2\cos\breve{h}_0 + x_0{}^2 s_2(exp(i\breve{h}_0),exp(-i\breve{h}_0),0,0,0,0), \quad x_0 = (a_0/Rec_1)^{1/2},$$

$$\breve{v}_1 = x_1 2\cos\breve{h}_1 + x_1{}^2 s_2(0,0,exp(i\breve{h}_1),exp(-i\breve{h}_1)0,0), \quad x_1 = (a_1/Rec_1)^{1/2},$$

где $\breve{h}_0 = Im(l^1 + c_0 x_0{}^2)t + m^+ q$, $\breve{h}_1 = Im(l^2 + c_0 x_1{}^2)t + (m^+ + q)q$, являются приближенными по невязке порядка 3/2 относительно $\|(m,n)\|$ решениями уравнения (2). Для доказательства существования решений уравнения (2) с указанными свойствами используется методика работы [8]. Линеаризуем уравнение (2) на приближенном решении $\breve{v}_s, s=0,1$. В результате получим уравнение

$$\dot{v} = L(m,n)v - (a_1(h,m,n) + a_2(h,m,n) + a_3(h,m,n))v_h, \quad h = h_s,$$

в котором

$$a_1 = -x_s \mathrm{L} ctg\, w(exp(i\breve{h}) + exp(-i\breve{h})), \quad \breve{h} = h + m^+ \breve{h},$$

$$a_2 = x_s{}^2(2^{-1}(\mathrm{L}(exp(i\breve{h}) + exp(-i\breve{h})^2 - (\mathrm{L} ctg\, w)^2 Re((1-\mathrm{L})^{-1} +$$
$$+ exp(-2i\breve{h})(2iw_0 + 1 - \mathrm{L}\, exp(-2im^+\breve{h}))^{-1}),$$

$$a_3 = o(\|(m,n)\|).$$

Вместо переменных t,q введем переменные t,h. В новых переменных уравнение (10) становится автономным и, следовательно, свойства устойчивости решения $v=0$ определяются спектром оператора

$$My = w_s y' - m m_s{}^2 + y - \Lambda y_{h_s} + (a_1 + a_2 + a_3) y_{h_s}, \quad y(h + 2p\, m_s) = y(h).$$

Здесь $m_s = m^+ + sq$, $h_s = m_s h$. При $(m,n) = (0,0)$ собственной функцией оператора M является $\exp(i\frac{k}{m_s}h)$, которой отвечает собственное значение

$$l_k(0,0) = iw_0 \frac{k}{m_s} h + 1 - \mathrm{L}\, exp(ik\breve{h}).$$

Из условий 1, 2 следует, что при анализе $l_k(m,n)$ можно ограничиться значениями k вида $m^+ + kq = m^+{}_k$, $m^- + kq = m^-{}_k$. Для построения асимптотик критических собственных значений воспользуемся стандартной техникой. Положим

$$y = exp(i\frac{m^{+}{}_{k}}{m_s}h) + x_s\, y_2 + x_s{}^2\, y_3 + y_4(m,n), \quad l = iw_0(\frac{m^{+}{}_{k}}{m_s} - 1) + l' x_s{}^2 + \mathbf{K}.$$

Подставляем эти выражения в $M\, y = l\, y$. Приравняв слева и справа коэффициенты при x_s, $x_s{}^2$, получим уравнения относительно y_2, y_3. Находим y_2. Из условия разрешимости уравнения относительно y_3 следует

$$Re\, l' = (m(m^{+}{}_{k})^2 + \mathrm{L} m^{+}{}_{k} n\, sin(m^{+} h'))x_s{}^{-2} - 2\, Re\, c_0.$$

Заменим $m^{+}{}_{k}$ на $m^{-}{}_{k}$. В этом случае l' меняется на комплексно сопряженное. В случае $m^{+}{}_{k} = m_s$ полагаем

$$y = b_1\, exp(ih) + b_2\, exp(-ih) + x_s y_2 + x_s{}^2 y_3 + y_4(m,n), \quad l = x_s{}^2 l' + \mathbf{K}.$$

Действуя, как и выше, приходим к заключению, что для разрешимости уравнения относительно y_3 l' должно быть корнем квадратного уравнения

$$l^2 + 2\,\mathrm{Re}\, c_0\;\, l = 0.$$

Отсюда, следуя [8], убеждаемся в справедливости заключения теоремы о существовании, асимптотике и характере устойчивости решений v_s, $s = 0{,}1$.

Существование инвариантного тора уравнения (2) в области Q'' доказывается с помощью метода Крылова-Боголюбова-Митропольского [9]. Доказательство постоянства векторного поля на этом торе при фиксированных (m,n) осуществляется распространением на рассматриваемый случай методики работы [8].

Из изложенного выше следует. что принцип максимума амплитуды [10] справедлив здесь в следующей форме.

Принцип максимума амплитуды. Пусть a $(0 < a \le 1)$ отношение квадратов амплитуд двух различных бегущих волн уравнения (2), в котором $(m,n) \in Q$. Тогда, если $a < 1/2$, одна из бегущих волн этого уравнения неустойчива. Если $a > 1/2$ бегущие волны уравнения (2) орбитально асимптотически устойчивы.

В качестве особенности динамики двухпараметрического семейства уравнений (2) выделим бифуркацию рождения из неустойчивой бегущей волны устойчивой бегущей волна и неустойчивого бегущего тора с постоянным векторным полем на нем.

В заключении отметим, что значение $a = 1/2$ является бифуркационным в задаче об устойчивости спиновых решений феноменологического уравнения, описывающего эволюцию фронта горения [12].

Список использованной литературы

1. Ахманов С.А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей //Новые принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263-325.
2. Кащенко С.А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31. N.3. С. 467-473.
3. Ruelle D. Bifurcation in the presence of a symmetry group // Arch. Rat. Mech. An. 1973, V. 51, P. 136-152.
4. Марсден Дж., Мак- Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. - : Пер. с англ. М.: Мир, 1980. - 368 с.
5. Белан Е. П. Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом //Динам. системы. - 2000. - С. 130 - 137.
6. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций.//М.:ВИНИТИ, 1986. сер. Современные проблемы математики. Т. 5.С. 5 - 218.
7. Kuznetzov Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. - New York. Springer-Verlag, 1998. - 591 p.
8. Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю.С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией//Мат. сборник, 1986, т 130(172), в. 4(8), С. 488-499.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний- М.: Наука, 1974. - 504 с.
10. Колесов А.Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление параметрической буферности в системах параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией// Укр. мат. журн. 1998, т. 50, №1, С. 22-35.
11. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах// Изв. вузов, Радиофизика, 1982, т. 25 , С. 591 - 618.

Поступила в редколлегию 10.03.2001 г.