УДК 537 + 539.3

В.Н. ЧЕХОВ, докт.физ.-мат. наук, А.Дж.А. СОУС, асп., Таврический нац. ун-т

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Интегрируется система уравнений закона Гука относительно тангенциальных компонент вектора смещения для упругих трансверсально-изотропных пологих оболочек. Оценивается влияние коэффициента податливости поперечному сдвигу при кручении трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с поперечным круговым недеформируемым включением или круговым отверстием.

Система однородных разрешающих дифференциальных уравнений статики трансверсально-изотропной пологой оболочки имеет вид [1]

$$\Delta\Delta j - Eh\Delta_k w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{D}\Delta_k j - \frac{1}{K}\Delta\Delta_k j = 0, \Delta c - \frac{2K}{(1-n)D} c = 0. \quad (1)$$

Здесь j, w, c - функции напряжений, прогиба и сдвига; E, v, K - коэффициенты упругости; h- толщина оболочки; D - цилиндрическая жесткость.

Аналитическое представление решения системы (1) в полярных координатах r,q на срединной поверхности опубликовано в работах [3],[4] для симметрии деформированного состояния типа кручения [5]. Через производные от функций j, w, c выражаются все величины, характеризующие деформированное состояние оболочки, кроме тангенциальных смещений u_r, u_θ срединной поверхности, которые должны быть определены из трех соотношений упругости

$$Ehe_r = T_r - nT_q, \quad Ehe_q = T_q - nT_r, \quad Ehw_{rq} = (1+n)S_{rq}. \quad (2)$$

С учетом зависимостей между компонентами вектора смещений

$$u_r = u_1 \cos q + u_2 \sin q, \quad u_q = u_2 \cos q - u_1 \sin q \quad (3)$$

и выражений усилий T_r, T_q, S_{rq}, через функцию j система (2) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} - n\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}\right) - k_1 w, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{2+2n}{Eh}\left(\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - n\frac{\partial^2 j}{\partial y^2}\right) - k_2 w. \quad (4)$$

Здесь главные кривизны k_1, k_2 срединной поверхности приближенно полагаются постоянными и связаны с параметрами ε, R_0:

$$k_1 = \frac{1-e}{R_0},\ k_2 = \frac{1+e}{R_0};\quad \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2}(k_1+k_2),\ e = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}. \tag{5}$$

Условием совместности системы (4) является первое из уравнений (1). Функции w, $j = EhcU$ $\left(c = h/\sqrt{12-12n^2}\right)$, удовлетворяющие системе (1) и убывающие по абсолютной величине при $r \to \infty$, имеют вид [4]:

$$U = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\infty} e^{\mathbf{l}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} C_{n,j}^{(\mathbf{l})} r^{-2j} + \operatorname{Im}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}} a_{n,j}^{(\mathbf{l})} r^{j} K_{2n-j}(s r)\right)\sin 2nq\ ,$$

$$w = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\infty} e^{\mathbf{l}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} D_{n,j}^{(\mathbf{l})} r^{-2j} + \operatorname{Im}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}} b_{n,j}^{(\mathbf{l})} r^{j} K_{2n-j}(s r)\right)\sin 2nq\ . \tag{6}$$

Здесь $C_{n,j}^{(\mathbf{l})}, D_{n,j}^{(\mathbf{l})}$- вещественные и $a_{n,j}^{(\mathbf{l})}, b_{n,j}^{(\mathbf{l})}$ - комплексные постоянные; $r = r/\sqrt{cR_0}$; $s = \left(\sqrt{1+d} + i\sqrt{1-d}\right)/\sqrt{2}$; $d = Ehc/(2KR_0)$; $K_{2n-j}(s r)$ - цилиндрические функции Макдональда.

Заменой переменных $x = \sqrt{cR_0}\,x$, $y = \sqrt{cR_0}\,h$ и искомых функций:

$$\sqrt{R_0/c}\,u_1 = u_1 - (1+n)\frac{\partial}{\partial x}U\ ,\quad \sqrt{R_0/c}\,u_2 = u_2 - (1+n)\frac{\partial}{\partial h}U \tag{7}$$

система (4)приводится к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \nabla^2 U - (1-e)w,\quad \frac{\partial u_2}{\partial h} = \nabla^2 U - (1+e)w,\quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial h} = 0, \tag{8}$$

где ∇^2- оператор Лапласа в переменных x, h или r, q.

Следуя работе [2], уравнения (8) комбинируются в комплексные:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u_1 + iu_2) = e\,w,\quad \operatorname{Re}\left(\frac{\partial}{\partial z}(u_1+iu_2)\right) = \nabla^2 U - w, \tag{9}$$

где $z = x + ih = re^{iq}$; $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial h}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-iq}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{i}{r}\dfrac{\partial}{\partial q}\right)$; (10)

чертой сверху обозначается комплексное сопряжение.

Из первого уравнения (9) следует $u_1 + iu_2 = f(r,q) + w(z)$, где $w(z)$ - аналитическая функция комплексного переменного; $f(r,q)$ - какое-либо частное решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = e\,w. \tag{11}$$

Если найти частное решение вспомогательного уравнения

$$\nabla^2 g = w, \tag{12}$$

то, подставляя w из уравнения (12) в (11), выражаем частное решение $f(r,q)$ и решение первого уравнения (9) через функцию $g(r,q)$:

$$f(r,q)=4e\,\frac{\partial}{\partial z}\,g(r,q);\quad u_1+iu_2=w(z)+4e\,\frac{\partial}{\partial z}\,g(r,q)\,. \quad (13)$$

Из зависимостей (3), (7), (13) получаются выражения тангенциальных смещений через функции $w(z)$, $g(r,q)$, $U(r,q)$

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_r=\mathrm{Re}[e^{-iq}w(z)]+2e\left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos 2q-\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial q}\sin 2q\right)-(1+n)\frac{\partial U}{\partial r},$$

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_q=\mathrm{Im}[e^{-iq}w(z)]-2e\left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin 2q+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial q}\cos 2q\right)-\frac{1+n}{r}\frac{\partial U}{\partial q}\ .(14)$$

Второе уравнение системы (9) с учетом зависимостей (13), (10) преобразуется в условие на аналитическую функцию $w(z)$:

$$\mathrm{Re}\,w'(z)=\nabla^2 U-w+e\left[\cos 2q\left(\nabla^2 g-2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right)+\sin 2q\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial q}\right)\right].\quad (15)$$

Нетрудно проверить, что частным решением вспомогательного уравнения (12) является выражение:

$$g=\sum_{\mathbf{l}=0}^{\infty}e^{\mathbf{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{Im}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}}\breve{b}_{n,j}^{(\mathbf{l})}r^{j}K_{2n-j}(sr)-\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{D_{n,j+1}^{(\mathbf{l})}}{n^2-j^2}r^{-2j}\right)\sin 2nq\ ,(16)$$

где $\breve{b}_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})}=s^{-2}b_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})};\quad \breve{b}_{n,j}^{(\mathbf{l})}=s^{-2}b_{n,j}^{(\mathbf{l})}+(2j+2)s^{-1}\breve{b}_{n,j+1}^{(\mathbf{l})}\ (j=\overrightarrow{\mathbf{l}-1,0}).\quad (17)$

Подставляя выражение (16) в (15) и учитывая рекуррентные зависимости [3] между постоянными $C_{n,j}^{(\mathbf{l})}, D_{n,j}^{(\mathbf{l})}$:

$$D_{n,j}^{(\mathbf{l})}+4\left(n^2-(j-1)^2\right)C_{n,j-1}^{(\mathbf{l})}=\frac{n+j-1}{2n-2j}D_{n-1,j}^{(\mathbf{l}-1)}+\frac{n-j+1}{2n+2j}D_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}$$

$$2\le j\le n-1,\qquad D_{n,1}^{(\mathbf{l})}=\frac{n}{2n-2}D_{n-1,1}^{(\mathbf{l}-1)}+\frac{n}{2n+2}D_{n+1,1}^{(\mathbf{l}-1)},\qquad (18)$$

определяем аналитическую функцию $w(z)$ в следующем виде:

$$w(z)=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_{n,n}^{(0)}}{2n-1}z^{1-2n}+ie\left\{\frac{D_{1,1}^{(1)}}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{D_{n,n}^{(1)}}{2n-1}+4C_{n,n-1}^{(1)}\right]z^{1-2n}\right\}+$$

$$+i\sum_{\mathbf{l}=2}^{\infty}e^{\mathbf{l}}\left\{\left[D_{1,1}^{(\mathbf{l})}-\frac{1}{4}D_{2,1}^{(\mathbf{l}-1)}\right]\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{D_{n,n}^{(\mathbf{l})}}{2n-1}+4C_{n,n-1}^{(\mathbf{l})}-\frac{D_{n+1,n}^{(\mathbf{l}-1)}}{8n^2-4n}\right]z^{1-2n}\right\}.(19)$$

Здесь опущены слагаемые $iCz+C_1+iC_2$, которым соответствует [2] тангенциальные смещения без деформации.

Результат подстановки выражений (6), (16), (19) в формулы (14) для тангенциальных смещений представим раздельно для полигармонической части:

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_r^{(pol)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{D_{n,n}^{(0)}}{2n-1} + \frac{1+n}{r^2}2nC_{n,n}^{(0)}\Bigg]\frac{\sin 2nq}{r^{2n-1}} + e\Bigg\{\Bigg[\Bigg[D_{1,1}^{(1)} - \frac{1}{6r^2}D_{2,2}^{(0)} +$$

$$+\frac{2+2n}{r^2}C_{1,1}^{(1)}\Bigg]\frac{\sin 2q}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[(2+2n)\sum_{j=1}^{n}jC_{n,j}^{(1)}r^{-2j-1} + \frac{1}{2}D_{n-1,n-1}^{(0)}r^{3-2n} + \Bigg(4C_{n,n-1}^{(1)} +$$

$$+\frac{D_{n,n}^{(1)}}{2n-1}\Bigg)r^{1-2n} - D_{n+1,n+1}^{(0)}\frac{r^{-1-2n}}{4n+2}\Bigg]\sin 2nq\Bigg\} + \sum_{\mathbf{l}=2}^{\infty}e^{\mathbf{l}}\Bigg\{\Bigg[\Bigg[D_{1,1}^{(\mathbf{l})} - \frac{1}{2}D_{2,1}^{(\mathbf{l}-1)} + \frac{2+2n}{r^2}C_{1,1}^{(\mathbf{l})} -$$

$$-\frac{1}{6r^2}D_{2,2}^{(\mathbf{l}-1)}\Bigg]\frac{\sin 2q}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(\frac{D_{n-1,j}^{(\mathbf{l}-1)}}{2n-2j} - \frac{D_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}}{2n+2j} + \frac{2+2n}{r^2}jC_{n,j}^{(\mathbf{l})}\Bigg)r^{1-2j} +$$

$$+\Bigg(\frac{D_{n,n}^{(\mathbf{l})}}{2n-1} + 4C_{n,n-1}^{(\mathbf{l})} - \frac{D_{n+1,n}^{(\mathbf{l}-1)}}{4n-2}\Bigg)r^{1-2n} + \Bigg((1+n)2nC_{n,n}^{(\mathbf{l})} - \frac{D_{n+1,n+1}^{(\mathbf{l}-1)}}{4n+2}\Bigg)r^{-1-2n}\Bigg]\sin 2nq\Bigg\},$$

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_q^{(pol)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{D_{n,n}^{(0)}}{2n-1} - \frac{1+n}{r^2}2nC_{n,n}^{(0)}\Bigg]r^{1-2n}\cos 2nq + e\Bigg\{\frac{1}{2r}D_{1,1}^{(0)} +$$

$$+\Bigg[D_{1,1}^{(1)} + \Bigg(\frac{1}{6}D_{2,2}^{(0)} - (2+2n)C_{1,1}^{(1)}\Bigg)\frac{1}{r^2}\Bigg]\frac{\cos 2q}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[\frac{D_{n-1,n-1}^{(0)}}{2r^{2n-3}} - (1+n)2n\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{n,j}^{(1)}}{r^{2j+1}} +$$

$$+\Bigg(\frac{D_{n,n}^{(1)}}{2n-1} + 4C_{n,n-1}^{(1)}\Bigg)r^{1-2n} + D_{n+1,n+1}^{(0)}\frac{r^{-1-2n}}{4n+2}\Bigg]\cos 2nq\Bigg\} + \sum_{\mathbf{l}=2}^{\infty}e^{\mathbf{l}}\Bigg\{\frac{1}{2r}D_{1,1}^{(\mathbf{l}-1)} + \Bigg[D_{1,1}^{(\mathbf{l})} +$$

$$\Bigg(\frac{1}{6}D_{2,2}^{(\mathbf{l}-1)} - (2+2n)C_{1,1}^{(\mathbf{l})}\Bigg)\frac{1}{r^2}\Bigg]\frac{\cos 2q}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(\frac{D_{n-1,j}^{(\mathbf{l}-1)}}{2n-2j} + \frac{D_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}}{2n+2j} - \frac{2+2n}{r^2}nC_{n,j}^{(\mathbf{l})}\Bigg)r^{1-2j} +$$

$$+\Bigg(\frac{D_{n,n}^{(\mathbf{l})}}{2n-1} + \frac{n-1}{2n}\frac{D_{n+1,n}^{(\mathbf{l}-1)}}{2n-1} + 4C_{n,n-1}^{(\mathbf{l})} + \frac{1}{r^2}\frac{D_{n+1,n+1}^{(\mathbf{l}-1)}}{4n+2} - \frac{1+n}{r^2}2nC_{n,n}^{(\mathbf{l})}\Bigg)r^{1-2n}\Bigg]\cos 2nq\Bigg\}; \quad (20)$$

и для цилиндрической части решения:

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_r^{(cyl)} = \mathrm{Im}\Bigg\{\frac{1+n}{r}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,0}^{(0)}\big(s\,rK_{2n+1}(s\,r) - 2nK_{2n}(s\,r)\big)\sin 2nq +$$

$$+\sum_{\mathbf{l}=1}^{\infty}e^{\mathbf{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=0}^{\mathbf{l}-1}\Big((1+n)a_{n,j}^{(\mathbf{l})}\big(s\,rK_{2n-j+1}(s\,r) - 2nK_{2n-j}(s\,r)\big) + \hat{b}_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}\big((4n+$$

$$+4)K_{2n-j+2}(s\,r) - s\,rK_{2n-j+3}(s\,r)\big) - \hat{b}_{n-1,j}^{(\mathbf{l}-1)}s\,rK_{2n-j-1}(s\,r)\Big)r^{j-1} +$$

$$+(1+n)a_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})}\big(s\,rK_{2n-\mathbf{l}+1}(s\,r) - 2nK_{2n-\mathbf{l}}(s\,r)\big)\frac{1}{r^{1-\mathbf{l}}}\Bigg]\sin 2nq\Bigg\},$$

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_q^{(cyl)} = -\operatorname{Im}\left\{\frac{1+n}{r}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,0}^{(0)} 2nK_{2n}(s\,r)\cos 2nq \,+\right.$$

$$+\sum_{\mathbf{l}=1}^{\infty} e^{\mathbf{l}}\left(\sum_{j=0}^{\mathbf{l}-1}\breve{b}_{1,j}^{(\mathbf{l}-1)}\left(4K_{2-j}(s\,r)-s\,rK_{3-j}(s\,r)\right)r^{\,j-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+n}{r}\times\right.\right.$$

$$\times 2n\sum_{j=0}^{\mathbf{l}} a_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(s\,r)\,r^{\,j}+\sum_{j=0}^{\mathbf{l}-1}\left(\breve{b}_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}\left((4n+4)K_{2n-j+2}(s\,r)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-s\,rK_{2n-j+3}(s\,r)\right)+\breve{b}_{n-1,j}^{(\mathbf{l}-1)}s\,rK_{2n-j-1}(s\,r)\right)\frac{1}{r^{1-j}}\right]\cos 2nq\right)\right\}. \quad (21)$$

Полигармонические части решения не зависят от значений параметра d . Цилиндрические же части определены в диапазоне $0 < d < 1$. В бесконечном интервале $d > 1$ цилиндрические части функций напряжений и прогиба представляются [3] так:

$$U^{(cyl)} = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\infty} e^{\mathbf{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}}\left(A_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(a\,r)+B_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(b\,r)\right)r^{\,j}\sin 2nq\,,$$

$$w^{(cyl)} = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\infty} e^{\mathbf{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}}\left(E_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(a\,r)+F_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(b\,r)\right)r^{\,j}\sin 2nq\,. \quad (22)$$

Здесь $a = \sqrt{d+\sqrt{d^{\,2}-1}}$; $b = a^{-1}$; $A_{n,j}^{(\mathbf{l})}, B_{n,j}^{(\mathbf{l})}, E_{n,j}^{(\mathbf{l})}, F_{n,j}^{(\mathbf{l})}$ - вещественные постоянные. При этом цилиндрическая часть вспомогательной функции $g(r,q)$ принимает вид:

$$g^{(cyl)} = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\infty} e^{\mathbf{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}}\left(\breve{E}_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(a\,r)+\breve{F}_{n,j}^{(\mathbf{l})}K_{2n-j}(b\,r)\right)r^{\,j}\sin 2nq\,, \quad (23)$$

где $\breve{E}_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})} = b^{2}E_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})};\quad \breve{E}_{n,j}^{(\mathbf{l})} = b^{2}E_{n,j}^{(\mathbf{l})}+(2j+2)b\,\breve{E}_{n,j+1}^{(\mathbf{l})}\quad (j=\mathbf{l}-1,0)$;

$$\breve{F}_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})} = a^{2}F_{n,\mathbf{l}}^{(\mathbf{l})};\quad \breve{F}_{n,j}^{(\mathbf{l})} = a^{2}F_{n,j}^{(\mathbf{l})}+(2j+2)a\breve{F}_{n,j+1}^{(\mathbf{l})}\quad (j=\mathbf{l}-1,0). \quad (24)$$

Цилиндрическая часть смещений принимает форму:

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_r^{(cyl)} = \frac{1+n}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{n,0}^{(0)}\left(a\,rK_{2n+1}(a\,r)-2nK_{2n}(a\,r)\right)+B_{n,0}^{(0)}\left(b\,rK_{2n+1}(b\,r)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2nK_{2n}(b\,r)\right)\right)\sin 2nq+\sum_{\mathbf{l}=1}^{\infty}e^{\mathbf{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+n}{r}\sum_{j=0}^{\mathbf{l}}\left(A_{n,j}^{(\mathbf{l})}\left(a\,rK_{2n-j+1}(a\,r)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-2nK_{2n-j}(a\,r)\right)+B_{n,j}^{(\mathbf{l})}\left(b\,rK_{2n-j+1}(b\,r)-2nK_{2n-j}(b\,r)\right)\right)r^{\,j}+\sum_{j=0}^{\mathbf{l}-1}\left(\breve{E}_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}\left((4n+4)\times\right.\right.$$

$$\times K_{2n-j+2}(a\,r)-a\,rK_{2n-j+3}(a\,r)\right)+\breve{F}_{n+1,j}^{(\mathbf{l}-1)}\left((4n+4)K_{2n-j+2}(b\,r)-\right.$$

$$- brK_{2n-j+3}(br)\Big) - \breve{E}^{(\mathbf{l}-1)}_{n-1,j} arK_{2n-j-1}(ar) - \breve{F}^{(\mathbf{l}-1)}_{n-1,j} brK_{2n-j-1}(br)\Big)\frac{1}{r^{1-j}}\Bigg]\sin 2nq\,,$$

$$\sqrt{\frac{R_0}{c}}u_q^{(cyl)} = -\frac{1+n}{r}\sum_{n=1}^{\infty} 2n\Big(A^{(0)}_{n,0}K_{2n}(ar) + B^{(0)}_{n,0}K_{2n}(br)\Big)\cos 2nq +$$

$$+\sum_{\mathbf{l}=1}^{\infty} e^{\mathbf{l}}\Bigg\{\sum_{j=0}^{\mathbf{l}-1}\Big(\breve{E}^{(\mathbf{l}-1)}_{1,j}\Big(arK_{3-j}(ar) - 4K_{2-j}(ar)\Big) + \breve{F}^{(\mathbf{l}-1)}_{1,j}\big[br\,\times$$

$$\times K_{3-j}(br) - 4K_{2-j}(br)\big]\Big)r^{\,j-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1+n}{r}2n\sum_{j=0}^{\mathbf{l}}\Big(A^{(\mathbf{l})}_{n,j}K_{2n-j}(ar) +$$

$$+ B^{(\mathbf{l})}_{n,j}K_{2n-j}(br)\Big)r^{\,j} + \sum_{j=0}^{\mathbf{l}-1}\Big(\breve{E}^{(\mathbf{l}-1)}_{n+1,j}\Big((4n+4)K_{2n-j+2}(ar) - ar\,\times$$

$$\times K_{2n-j+3}(ar)\Big) + \breve{F}^{(\mathbf{l}-1)}_{n+1,j}\Big((4n+4)K_{2n-j+2}(br) - brK_{2n-j+3}(br)\Big) +$$

$$+\breve{E}^{(\mathbf{l}-1)}_{n-1,j} arK_{2n-j-1}(ar) + \breve{F}^{(\mathbf{l}-1)}_{n-1,j} brK_{2n-j-1}(br)\Big)\frac{1}{r^{1-j}}\Bigg]\cos 2nq\Bigg\}. \qquad (25)$$

Краевые условия на границе $r = r_0$ ненагруженного кругового выреза формулируются [1] относительно усилий и моментов:

$$T_r\big|_{r=r_0} = 0\,,\ S_{rq}\big|_{r=r_0} = 0\,,\ G_r\big|_{r=r_0} = 0\,,\ Q_r\big|_{r=r_0} = 0\,,\ H_{rq}\big|_{r=r_0} = 0\,. \qquad (26)$$

В случае же, когда к границе кругового выреза припаяно включение, деформациями которого можно пренебречь, краевые условия можно сформулировать относительно перемещений и углов поворота. При этом учтем, что система дифференциальных уравнений (1) основана [1] на приближенном представлении поля смещений оболочки в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_r(u_r(r,q) + g\,g_r(r,q)) + \mathbf{e}_q(u_q(r,q) + g\,g_q(r,q)) + \mathbf{n}w(r,q)\,. \qquad (27)$$

Вектор $\mathbf{\Omega}$ малого поворота срединной поверхности вычисляется через компоненты вектора смещения по формуле:

$$2\mathbf{\Omega} = (\nabla\times\mathbf{u})\big|_{g=0} = \mathbf{e}_r(J_q - g_q) - \mathbf{e}_q(J_r - g_r) + 2\mathbf{n}\Omega_n\,. \qquad (28)$$

Поэтому краевые условия на границе недеформируемого кругового включения в случае кручения оболочки сформулируем в виде:

$$u_r\big|_{r_0} = 0,\ u_q\big|_{r_0} = C_0,\ w\big|_{r_0} = 0,\ (g_r - J_r)\big|_{r_0} = 0,\ (g_q - J_q)\big|_{r_0} = 0\,. \qquad (29)$$

Здесь постоянная C_0 определяется после выполнения граничных условий (29).

Вошедшие в краевые условия (26), (29) величины представляются суммой безмоментного решения:

$$Ehu_r^0 = -(1+n)ht\, r\sin 2q\,, \quad Ehu_q^0 = -(1+n)ht\, r\cos 2q\,, \quad w^0 = 0\,,$$

$$S_{rq}^0 = -ht\,\cos 2q\,, \quad T_r^0 = -ht\,\sin 2q\,, \quad T_q^0 = ht\,\sin 2q \qquad (30)$$

и соответствующих величин, отвечающих решению систем (1), (4).

Таблица 1

δ	**Включение**				**Отверстие**			
	ρ_0=1/2	ρ_0=1	ρ_0=2	ρ_0=4	ρ_0=1/2	ρ_0=1	ρ_0=2	ρ_0=4
0	1,437	1,371	1,273	1,174	-4,368	-5,321	-8,406	-18,11
0	0,413	0,830	1,331	1,754	0,593	1,878	6,165	21,66
0,1	1,427	1,355	1,258	1,164	-4,445	-5,462	-8,600	-18,30
0,1	0,650	0,996	1,429	1,806	0,583	1,725	5,691	20,56
0,5	1,399	1,351	1,219	1,137	-4,715	-6,001	-9,527	-19,77
0,5	1,723	1,761	1,858	2,008	0,533	1,525	5,146	19,37
1,0	1,373	1,282	1,189	1,116	-4,999	-6,577	-10,57	-21,53
1,0	2,926	2,584	2,311	2,216	0,484	1,377	4,77	18,56
2,0	1,337	1,242	1,154	1,092	-5,465	-7,531	-12,35	-24,64
2,0	5,022	3,931	3,032	2,542	0,418	1,189	4,28	17,49
5,0	1,28	1,184	1,110	1,063	-6,495	-9,643	-16,42	-32,03
5,0	10,02	6,891	4,559	3,235	0,318	0,904	3,48	15,57

В табл.1 даны значения наибольших по абсолютной величине мембранных (нечетные строки) и изгибных (четные строки) напряжений в трансверсально-изотропной сферической оболочке при различных значениях параметра $d = Ehc/(2KR_0)$ податливости поперечным сдвигам и относительного радиуса $r_0 = r_0/\sqrt{cR_0}$ кругового выреза. Они достигаются на линии контакта с включением (радиальные напряжения $s_r^{(m)} = T_r/(th)$, $s_r^{(b)} = 6G_r/(th^2)$ при кручении оболочки с поперечным недеформируемым включением) или на границе отверстия ($s_q^{(m)} = T_q/(th)$, $s_q^{(b)} = 6G_q/(th^2)$)-кольцевые напряжения при кручении оболочки с поперечным круговым отверстием). Для коэффициента Пуассона принято значение $n = 0{,}3$.

В строках со значением $d = 0$ приведены напряжения, полученные на основании классической теории пологих оболочек [5, 6]. Они мало отличаются от напряжений в трансверсально-изотропной пологой оболочке при малых значениях параметра d, в частности, при значении $d = 0{,}1$.

Из табл.1 следует, что при увеличении параметра d в случае кручения сферической трансверсально-изотропной пологой оболочки с поперечным круговым отверстием заметно возрастают по абсолютной величине мембранные кольцевые напряжения Возрастание это тем заметнее, чем больше относительный радиус отверстия r_0. Изгибные кольцевые напряжения убывают с увеличением параметра d.

Если край отверстия подкреплен недеформируемым включением, то характер зависимости напряжений на границе с включением от параметра d изменяется на противоположный. С увеличением параметра d заметно возрастают изгибные напряжения, и возрастание это тем больше, чем меньше относительный радиус включения r_0. Мембранные напряжения убывают с увеличением параметра d.

Список использованной литературы

1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. К.: Наук. Думка, 1980. 636 с.(Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т.1).
2. Чехов В.Н. Выражение тангенциальных перемещений пологой оболочки через функцию напряжений // Прикладная механика.-1971.-Т.8, №3.-С.31-36.
3. Чехов В.Н., Соус А.Дж.А. О представлении решения уравнений статики трансверсально-изотропных пологих оболочек // Динамические системы 2000.- Вып.16.- С.63-69.
4. Чехов В.Н., Соус А.Дж.А. Кручение трансверсально-изотропной пологой оболочки с круговым отверстием // Теорет. и прикладная механика 2001.- Вып.33.- С.124-130.
5. Reissner J.E. Effects of a Circular Hole on States of Uniform Twisting and Shearing in Shallow Spherical Shells // ASME Journal of Applied Mechanics 1981. – Vol. 48, N3 – P.674–676.
6. Reissner E., Reissner J.E. Effects of a Rigid Circular Inclusion on States of Twisting and Shearing in Shallow Spherical Shells // ASME Journal of Applied Mechanics 1982. – Vol. 49, N2 – P.442–443.
7. Withum D. Die Kreiszylinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung // Ing.-Arch. 1958. - Vol. 26, N6 - P.435-446.

Поступила в редколлегию 20.07.2001