УДК 517.9:532

Д.О. ЦВЕТКОВ, аспирант, Таврический Национальный ун-т

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ.

В работе рассмотрена задача о малых движениях вязкой жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд и равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси, плотность которой в состоянии относительного равновесия имеет устойчивую стратификацию. Доказана теорема существования сильного решения начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи. Будем считать, что вязкая стратифицированная жидкость частично заполняет некоторый сосуд и равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{w}_0$ вокруг вертикальной оси. В состоянии относительного равновесия жидкость занимает область Ω, ограниченную твердой стенкой S и равновесной поверхностью Г. Введем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3), вращающуюся вместе с жидкостью, причем ось Ox_3 направлена вдоль оси вращения. При этом стационарное распределение плотности жидкости r_0 зависит от формы параболоида свободного вращения, т.е. является функцией всех переменных (x_1, x_2, x_3).

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$\begin{gathered} 0 < N_{\min}^2 \le N^2(\bar{x}) \le N_{\max}^2 =: N_0^2 < \infty, \\ N^2(\bar{x}) := \nabla U_0 \cdot \nabla r_0 / r_0(\bar{x}), \quad r_0(0) > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $N^2(\bar{x})$ – квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля - Брента), $U_0 = U_0(\bar{x})$ - потенциал внешнего поля массовых сил.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(\bar{x}, t)$ ($\bar{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$) поле скорости в жидкости, $p = p(\bar{x}, t)$ – отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0(\bar{x})$, а через $r = r(\bar{x}, t)$ – отклонение поля плотности от исходного поля $r_0(\bar{x})$.

Линеализированные уравнения для определения функции $\vec{u}$, p, r имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0 \vec{u} \times \vec{e} = \rho_0^{-1}(\bar{x})\left[-\nabla p + \rho\,\frac{N^2(\bar{x})\rho_0}{\nabla \rho_0} + \mu \Delta \vec{u}\right] + \vec{f}(\bar{x},t), \\
\nabla \cdot \vec{u} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0, \qquad \bar{x} \in \Omega,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где μ - коэффициент динамической вязкости жидкости.

В дальнейшем будем считать, что Ω - кусочно-гладкая область с ненулевыми внутренними и внешними углами.

На твердой стенке S для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания

$$
\vec{u} = \vec{0} \qquad (на\ S). \tag{3}
$$

Кинематические и динамические условия на поверхности Г удобно записать в криволинейной системе координат $Ox_1x_2x_3$, в которой уравнение Г имеет вид $x_3 = 0$, тогда, считая, что свободно движущаяся поверхность имеет уравнение $x_3 = V(t, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$, упомянутые условия таковы:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V}{\partial t} = u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} \ (\ на\ \Gamma\ ), \qquad \int_\Gamma V d\Gamma = 0, \\
\mu(\ u_{i,3} + u_{3,i}\ ) = 0\ (\ i = 1,2\ ), \qquad -p + 2\mu u_{3,3} = \alpha(\ \hat{x}\ )V, \\
\alpha(\hat{x}\ ) := (\ \nabla P_0 \cdot \vec{n}\ )_\Gamma, \quad \hat{x} := (\ x_1, x_2\ ),
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к границе области Ω, а через $u_{i,k}$ обозначены ковариантные производные ковариантного вектора u_i по переменной x_k.

В начальный момент времени естественно считать заданными

$$
\vec{u}(\ \bar{x}, 0\ ) = \vec{u}^0(\ \bar{x}\ ), \quad V(\ \hat{x}, 0\ ) = V^0(\ \hat{x}\ ), \quad \rho(\ \bar{x}, 0\ ) = \rho^0(\ \bar{x}\ ). \tag{5}
$$

Таким образом, задача о малых движениях тяжелой вязкой стратифицированной жидкости в открытом равномерно вращающемся сосуде сводится к решению уравнений (2) при краевых и начальных условиях (3)-(5).

2. Функциональные пространства. Начально-краевую задачу (2)-(5) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования уравнений (2) на ортогональные подпространства. Свяжем с функцией $\rho_0 = \rho_0(\bar{x})$ гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор - функций со скалярным произведением $(\vec{u}, \vec{v}) := \int_\Omega \rho_0(\bar{x}) u(\bar{x}) \overline{\vec{v}(\bar{x})} d\Omega$.

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$
\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \tag{6}
$$

Здесь $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0) = \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : div\vec{u} = 0\ (\Omega),\ u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = 0\ (\partial\Omega) \right\}$,

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) := \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0\ (S), \right.$$

$$\left. \nabla \cdot \vec{v} = 0\ (\Omega),\ \int_\Gamma p d\Gamma = 0 \right\}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) := \left\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla \varphi,\ \varphi = 0\ (\Gamma) \right\}.$$

Наряду с введенными пространствами понадобятся еще гильбертово пространство $\Im_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярными произведением $(\varphi, \psi)_{\Im_2(\Omega)} := \int_\Omega \rho_0(\bar{x}) \frac{N^2(\bar{x})}{(\nabla \rho_0)^2} \varphi(\bar{x}) \overline{\psi(\bar{x})} d\Omega$ и гильбертово пространство $L_{2,a}(\Gamma)$, связанное с неизвестной функцией $V(\vec{x}, t)$, со скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_0 := \int_\Gamma a(\hat{x}) \xi(\hat{x}) \overline{\eta(\hat{x})} d\Gamma. \tag{7}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что состояние относительного равновесия вращающейся жидкости в сосуде статически устойчиво по линейному приближению, это условие равносильно тому, что

$$a(\vec{x}) \geq a_0 > 0 \quad (\vec{x} \in \Gamma). \tag{8}$$

Отсюда следует, что норма порожденная (7) эквивалентна обычной норме гильбертова пространства $L_2(\Gamma)$. В частности $L_2(\Gamma) = H_0 \oplus \{1_\Gamma\}$.

Рассмотрим также подпространство

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) := \left\{ \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : div\vec{u} = 0\ (\Omega),\ \vec{u} = \vec{0}(S) \right\}$$

пространства $\vec{H}^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)} = E(\vec{u}, \vec{v}), \qquad E(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1} (u_{i,j} + u_{j,i}) v_{i.j} d\Omega.$$

3. Переход к операторному уравнению. Будем считать отдельные слагаемые в (2) функциями от t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Тогда в силу условия соленоидальности для $\vec{u}$, граничного условия (3) имеем:

$$\vec{u}(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0.S}(\Omega, \rho_0),$$

$$\rho^{-1}{}_0 \nabla p(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0).$$

Пусть $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ ортопроекторы на $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ соответственно. Применяя их к первому уравнению (2), получаем:

$$\vec{0} = -\rho_0^{-1}\nabla \varphi + P_{0,\Gamma}\left(\frac{N^2(\bar{x})}{\nabla \rho_0} \rho \right) + P_{0,\Gamma}\left(\rho_0^{-1} \cdot \mu\Delta\vec{u} \right) + P_{0,\Gamma} \vec{f}(x, t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2w_0 \cdot P_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3) = -r_0^{-1}\nabla\tilde{p} + P_{0,S}\left(\frac{N^2(\bar{x})}{\nabla r_0}\, r\right) + \tag{10}$$
$$+ P_{0,S}\left(r_0^{-1}\cdot m\Delta\vec{u}\right) + P_{0,S}\,\vec{f}(x,t).$$

Соотношение (9) показывает, что $r_0^{-1}\nabla j(\bar{x},t)$ может быть найдено, если известно решение $(\vec{u}, r)$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (10), а также условий (3)-(4) (с соответствующей заменой $p \to \tilde{p}$, так как $p = \tilde{p} + j$, $j = 0$ (на Г)) и условия (5).

Теорема 2. *Классическое решение начально-краевой задачи (2)-(5) есть решение задачи Коши для дифференциально операторного уравнения:*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ V\\ r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mA + 2iw_0 S_0 & gG & C\\ -g_n & 0 & 0\\ -C^* & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ V\\ r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{f}_{0,S}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{11}$$
$$\left(\vec{u}(0), V(0), r(0)\right)^t = (\vec{u}^0, V^0, r^0)^t,$$
$$(\vec{u}, V, r)^t = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, r) \oplus H_0 \oplus \Im_2(\Omega) =: H.$$

и уравнения (9). Здесь $C^*\vec{u} := -\nabla r_0 \cdot \vec{u}$ *и* $Cr = -P_{0,S}\left((\nabla r_0)^{-1} N^2(\bar{x})\, r\right)$ взаимно сопряжены и $\|C\| = \|C^*\| \le N_0$; A есть неограниченный самосопряженный, положительно определенный оператор с $\overline{D(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, r_0)$, при этом A^{-1} – компактный, положительный, действующий в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega, r_0)$; оператор определенный соотношением $r_0^{-1}(\bar{x})\nabla p(\bar{x}) = Gj$, есть линейный ограниченный ($H^{1/2}_{\Gamma} = H^{1/2}(\Gamma)\cap H_0$, где $H^{1/2}(\Gamma)$- пространство Соболева-Слободетского (см.[3])); g_n- оператор следа: $g_n\vec{u} := u_n = \vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\Gamma}$, $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, r_0)$.

Лемма 4. 1^0.*Оператор g_n может быть расширен до оператора $\tilde{g}_n$ с областью $D(\tilde{g}_n) = \vec{J}_{0,S}(\Omega, r_0)$, в этом случае оператор $\tilde{g}_n$ есть оператор сопряженный к оператору G: $\tilde{g}_n = G^*$.*

2^0. *Для операторов A и $\tilde{g}_n$ следующие включения имеют место: $D(A) \subset D(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, r_0) \subset D(\tilde{g}_n)$.*

Определение 5. *Функции $\vec{u}(\bar{x},t)$, $V(\bar{x},t)$, $r(\bar{x},t)$ и $p(\bar{x},t) = j(\bar{x},t) + \tilde{p}(\bar{x},t)$ назовем сильным решением задачи (2)-(5), если вы-*

полнено (9) и $\{\vec{u}, V, r\}$ *есть сильное решение задачи Коши (11) в пространстве* H. *Это значит, что для* $\forall t \geq 0$ *функции* $\vec{u} = \vec{u}(t) \in D(A)$, $V = V(t) \in D(G)$, $r = r(t) \in \Im_2(\Omega)$ *и функции* $\partial u/\partial t, \partial V/\partial t$, $\partial r/\partial t$, $A\vec{u}(t)$, $S_0\vec{u}(t)$, $GV(t)$, $Cr(t)$ *есть непрерывные в t, кроме того, уравнение с начальными условиями (см.(11)) выполнены.*

Используя замену $B_0^{1/2}V = y$ (оператор $B_0 = P_\Gamma a(\vec{x})P_\Gamma$ положительно определен, см.(8), P_Γ ортопроектор на H_0) и рассматривая задачу (11) в предположении $m = 1$, $g = 1$ (если m и g произвольные положительные числа, мы сможем сделать замену $g^{1/2}V \to V$, $g^{1/2}G \to G$, $mA \to A$ и получить задачу для $m = g = 1$). Свяжем с задачей (16) оператор-матрицу:

$$T_0 := \begin{pmatrix} A + 2iw_0 S_0 & GB_0^{1/2} & C \\ -B_0^{1/2}G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

которая имеет (плотную в H) область определения

$$D(T_0) = D(A) \oplus D(G) \oplus \Im_2(\Omega). \tag{13}$$

Лемма 6. *Оператор* T_0 *с областью определения (13) есть аккретивный оператор, т.е. для любых* $(\vec{u}, y, r)^t \in D(T_0)$ *имеет место неравенство* $\mathrm{Re}(T_0(\vec{u}, y, r)^t, (\vec{u}, y, r)^t)_H = (A\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$.

Отметим, что оператор T_0 не является максимально аккретивным оператором. В связи с этим представим $(\vec{u}, y, r)^t = e^{at}(v, h, m)^t$, $a > 0$, и, подставляя в (11) с учетом (12), получаем следующую задачу Коши:

$$\frac{dy}{dt} + T_a y = f(t), \quad y(0) = y^0, \quad y(t) = (\vec{v}(t), h(t), m(t))^t,$$

$$f(t) = (\vec{f}_{0,S}(t), 0, 0)^t e^{-at}, \quad T_a := T_0 + aI, \tag{14}$$

I *– единичный оператор в* H.

Всякий аккретивный оператор допускает расширение до максимального аккретивного оператора (см.[2]), поэтому дальнейшее исследование задачи (14) основывается на расширении оператора T_a до максимального аккретивного.

Введем операторы: $Q_1 := (B_0^{1/2}G^*)A_a^{-1/2}$, $\quad Q_1^* := A_a^{-1/2}(GB_0^{1/2})$, $A_a = A + aI$.

Лемма 7. *Имеют место следующие соотношения:*

$$Q_1^+ \subset Q_1, \;\; Q_1^+ = Q_1^*\Big|_{D(G)}, \;\; \overline{Q_1^+} = Q_1^* .$$

Теорема 8. *Замыкание* $T := \overline{T_a}$ *оператора* T_a *есть максимально аккретивный оператор. При этом:*

$$D(T) = \left\{ \begin{aligned} &(\vec v, h, m)^t \in H \,\big|\, \vec v \in D(A_a^{1/2}), \\ &(A_a^{-1}R + I)\vec v + A_a^{-1/2}Q_1^* h + A_a^{-1/2}Q_2^* m \in D(A_a) \end{aligned} \right\}, \tag{15}$$

$$T = \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_a^{-1/2}RA_a^{-1/2} + I & Q_1^* & Q_2^* \\ -Q_1 & aI & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $R := 2iw_0 S_0$, $\;\; Q_2 := C^* A_a^{-1/2}$, $\;\; Q_2^* = A_a^{-1/2}C$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что оператор T_a представим в виде:

$$T_a = \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_a^{-1/2}RA_a^{-1/2} + I & Q_1^+ & Q_2^* \\ -Q_1 & aI & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Замыкание оператора T_a состоит в замене в среднем блоке оператора Q_1^+ на Q_1^*. Действительно, оператор T представлен в виде произведения $T = T_1 T_2 T_1$ (см. (16)) замкнутых операторов. При этом T_1^{-1} - ограничен, так как ограничен оператор $A_a^{-1/2}$; а T_2^{-1} ограничен потому, что

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} M & -a^{-1}MQ_1^* & -a^{-1}MQ_2^* \\ a^{-1}Q_1 M & a^{-1}(I - a^{-1}Q_1 M Q_1^*) & -a^{-2}Q_1 M Q_2^* \\ a^{-1}Q_2 M & -a^{-2}Q_2 M Q_1^* & a^{-1}(I - a^{-1}Q_2 M Q_2^*) \end{bmatrix},$$

где Q_i, Q_i^* $(i = 1,2)$ и $M := (I + A_a^{-1/2}RA_a^{-1/2} + a^{-1}Q_1^*Q_1 + a^{-1}Q_2^*Q_2)^{-1}$ ограниченные операторы. Далее непосредственно проверяется, что элементы $y \in D(T)$ определяются условиями (15).

4. Теорема о существовании сильного решения. Рассмотренные выше свойства оператор-матрицы T, позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{gathered} \vec u^{\,0} \in D(A), V^0 \in D(G) = H_\Gamma^{1/2}, \;\; r^0 \in D(C) = \Im_2(\Omega), \\ \vec f(t) \in C^1[0,T; \vec L_2(\Omega, r_0)] \end{gathered} \tag{17}$$

для задачи Коши **(14)**. *Тогда она имеет единственное сильное решение для* $t \in [0,T]$.

Наметим доказательство теоремы. Вместо задачи (14) рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt}+Ty=f(t),\qquad y(0)=y^0. \tag{18}$$

При этом $y^0\in D(T_a)\subset D(T)$, $f(t)=(\vec{f}_{0,S}(t),0,0)^T e^{-at}\in C^1[0,T;H]$.

Так как оператор T есть максимально аккретивный оператор, то задача (18) имеет единственное сильное решение $y(t)$ на сегменте $[0,T]$ (см. [2]). При этом для $y(t)$ (18) выполнено для $\forall t\in[0,T]$, т.е. следующие уравнения и начальные условия имеют место:

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{v}}{dt}+A_a((A_a^{-1}R+I)\vec{v}+A_a^{-1/2}Q_1^*h+A_a^{-1/2}Q_2^*m)=\vec{f}_{o,S}e^{-at},\ \vec{v}(0)=\vec{u}^o,\\ \dfrac{dh}{dt}-Q_1A_a^{1/2}\vec{v}+ah=0,\ h(0)=B_0^{1/2}V^o,\\ \dfrac{dm}{dt}-Q_2A_a^{1/2}\vec{v}+am=0,\ m(0)=r^o.\end{cases} \tag{19}$$

Возможность раскрыть скобки в первом уравнении (19) (этот факт основывается на приведении выражения стоящего в скобках, к интегральному уравнению Вольтера второго рода в гильбертовом пространстве) позволяет утверждать, что (14) выполнено для функции $y(t)$. Теорема доказана.

Следствие10. *Если условия (17) выполнены, задача (2)–(5) имеет единственное сильное решение (в смысле определения 5) для* $\forall t\in[0,T]$.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н. Д. Копачевскому за оказанное внимание и поддержку в работе.

Список использованной литературы

1. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1967.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977.

Поступила в редколлегию 02.06.2001 г.