УДК 539.3

Н.Х.ДЕМЧЕНКО, канд.физ.-мат.наук, В.Н.ТИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Таврический нац. ун-т

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дан анализ динамических уравнений теории балок, пластин и оболочек с точки зрения присутствия в них членов, приводящих к известным уравнениям типа С.П.Тимошенко, которые являются уравнениями гиперболического типа. Показано, что с точки зрения асимптотической теории эти уравнения упрощаются до уравнений параболического типа, основанных на гипотезах классической теории Эйлера-Бернулли.

Объектами исследований прикладной теории упругости традиционно являются тонкостенные элементы строительных и иных конструкций, такие как стержни (балки), пластины и оболочки. Все они обладают «тонкостенностью», т.е. какие-либо из их линейных размеров малы по отношению к другим или к базе нагружения, если эта нагрузка периодическая.

В период становления теории оболочек были построены безмоментная и моментная теории, которые с большой степенью достоверности описывают напряженно-деформированное состояние статических задач. Основным методом получения уравнений равновесия является метод гипотез о деформированном состоянии объекта, например, о прямолинейности нормали при изгибе и другие, которые позволяют сформулировать краевые задачи теории балок, пластин и оболочек. Вторым является метод асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости с учетом малого параметра тонкостенности [1]. Он основан на разложении искомых величин в степенные ряды Маклорена по нормальной координате к срединной поверхности оболочки. Показано, что при удержании только линейных членов разложения полученные уравнения описывают безмоментное состояние оболочек и стержней, а удержание трех членов степенных рядов дает описание моментного состояния оболочек и пластин. Этот метод получения прикладной теории уточнил уравнения, вытекающие из метода гипотез, добавив в них недостающие элементы и убрав лишние.

Переход к динамическим задачам теории пластин и оболочек был выполнен квазистатическим методом, т.е. добавлением сил инерции в уравнения равновесия (принцип Даламбера в механике), что привело к параболичности уравнений изгибных колебаний и гиперболичности продольных. Но если последние согласованы с условием, что скорость распространения возмущений конечна, то уравнения изгибных (поперечных) колебаний дают бесконечную скорость распространения возбужденных волн, что казалось дефектом теории Кирхгофа-Лява. Поэтому были предприняты попытки уточнения уравнений динамики пластин, стержней и оболочек, которые можно назвать как «теории типа С.П.Тимошенко» [2]. Он первым сформулировал уточненные уравнения динамики, допускающие наличие двух конечных скоростей распространения изгибных волн.

Получение новых уравнений движения было сделано методом гипотез и уточнением зависимостей от нормальной координаты основных параметров напряженно-деформированного состояния, что приводило к правдоподобным уравнениям с некоторым числом неопределенных параметров, подбираемых из условий уточнения, например, частот собственных колебаний пластин и оболочек. Теория С.П.Тимошенко может быть уточнена разложением по специальным волновым координатным функциям (фронтам) [3], коэффициенты которых определены из итерационных соотношений. Однако получение конечных результатов связано с большим объемом вычислений слабосходящихся рядов, что приводит к весьма высокочастотным волновым процессам типа «белого шума».

Предметом обсуждения настоящей статьи являются уравнения пластин и оболочек, получаемые из уравнений теории упругости разложением в ряды Маклорена по нормальной координате в специальной системе ортогональных координат, введенных в [1]. Следуя формальному методу степенных рядов, разложим искомый вектор смещений и нормальных напряжений $\vec{f} = \{\vec{u}, \vec{s}_n\}^T$ в степенные ряды по нормальной координате n до 3-го порядка включительно, исходя из уравнений теории упругости, записанных в виде системы уравнений

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial n} = \hat{M}(n,s,t,t,\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t})\cdot \vec{f} + \vec{g}(n,s,t,t), \qquad (1)$$

которая может быть получена исключением величин, не входящих в граничные условия - компонент тензора напряжений s_{st}, s_{ss}, s_{tt} - в законе Гука и уравнениях движения. Здесь $\hat{M}$ - матрица 6-го порядка, содержащая производные первого и второго порядков по координатам s, t вдоль линий кривизны и времени t, $\vec{g}$ - вектор объемных сил, который в дальнейшем будет опущен как второстепенный для анализа. Решение системы (1) имеет вид:

$$\vec{f}(n,s,t,t) = \left(\hat{E} + \hat{M}\cdot n + \hat{N}\cdot n^2 + \hat{L}\cdot n^3 + \cdots\right)\vec{f}(0,s,t,t), \qquad (2)$$

где $n=0$ - срединная поверхность оболочки (пластинки) толщиной $2h$, $\hat N, \hat L$ - матрицы, получаемые из $\hat M$ дифференцированием по нормальной координате и возведением в степень исходной:

$$\hat N = \frac{\left(\hat M'_n + \hat M^2\right)}{2}\Big|_{n=0},$$
$$\hat L = \frac{\left(\hat M''_n + 2\hat M'_n \hat M + \hat M \hat M'_n + \hat M^3\right)}{6}\Big|_{n=0} \tag{3}$$

Удовлетворяя граничным условиям первой основной задачи

$$\vec s_n(h,s,t,t) = \vec s_n^{\,+}, \qquad \vec s_n(-h,s,t,t) = \vec s_n^{\,-}$$

и вводя симметричные и антисимметричные векторы

$$\vec q^{\,+} = \frac{\vec s_n^{\,+} + \vec s_n^{\,-}}{2}, \quad \vec q^{\,-} = \frac{\vec s_n^{\,+} - \vec s_n^{\,-}}{2} = \frac{1}{2}[\vec s\,],$$

получим [4]:

$$\hat n_3 h^2 \vec u(0) + (\hat e + \hat n_4 h^2)\vec s_n(0) = \vec q^{\,+}$$
$$(\hat m_3 + \hat l_3 h^2) h \vec u(0) + (\hat m_4 + \hat l_4 h^2) h \vec s_n(0) = \vec q^{\,-} \tag{4}$$

Здесь $\hat m_i, \hat n_i, \hat l_i \quad (i=3,4)$ – соответствующие матриц-блоки третьего порядка для матриц $\hat M, \hat N, \hat L$, $\hat e$ - единичная матрица третьего порядка.

Из (4) можно последовательно получить безмоментную, полубезмоментную и моментную теории оболочек, удерживая члены первого, второго и третьего порядка по h при исключении в (4) вектора $\vec s_n(0)$:

безмоментная теория:

$$\vec s_n(0) = \vec q^{\,+}; \qquad \hat m_3 \vec u(0) = \frac{\vec q^{\,-}}{h} - \hat m_4 \vec q^{\,+};$$

полубезмоментная теория:

$$\vec s_n(0) = (\hat e - \hat n_4 h^2)\vec q^{\,+} - \hat n_3 h^2 \vec u(0);$$
$$(\hat m_3 - \hat m_4 \hat n_3 h^2)\vec u(0) = \frac{\vec q^{\,-}}{h} - \hat m_4(\hat e - \hat n_4 h^2)\vec q^{\,+}; \tag{5}$$

моментная теория:

$$\vec s_n(0) = (\hat e - \hat n_4 h^2)\vec q^{\,+} - \hat n_3 h^2 \vec u(0);$$
$$(\hat m_3 + \hat l_3 h^2 - \hat m_4 \hat n_3 h^2)\vec u(0) = \frac{\vec q^{\,-}}{h} - (\hat m_4 + \hat l_4 h^2 - \hat m_4 \hat n_4 h^2)\vec q^{\,+}.$$

Анализ этих выражений позволяет утверждать, что основное напряженно-деформированное состояние вызывают антисимметричные нагрузки $\vec q^{\,-}$, т.е. сжимающими нагрузками $\vec q^{\,+}$ можно пренебречь.

Сдвиговые напряжения имеют первый порядок малости при наличии внешней нагрузки $\vec{q}^{\,-}$, что видно только при учете членов второго порядка по h при коэффициентах полубезмоментной и моментной теорий. Моментная теория дает существенную поправку в основном операторе над $\vec{u}(0)$, что делает полубезмоментную теорию неправомерной для определения перемещений. И, наконец, операторы над $\vec{u}(0)$ имеют вид уравнений типа С.П.Тимошенко даже в безмоментной теории (!), хотя этот вывод справедлив только для оболочек - для изгиба пластин основным является моментное состояние.

Но прикладные теории, являясь асимптотическими, требуют введения не формального разложения по степеням n, а разложения по степеням реального малого параметра, каким являются отношение толщины оболочки к меньшему радиусу кривизны e_1 и отношение этого радиуса к длине базы нагружения e_2 (для пластин параметром является $e = e_1 e_2$). И только асимптотический анализ может оценить вклад всех членов оператора над $\vec{u}(0)$ так, чтобы разложение по n было обоснованным. Покажем это на уравнениях колебаний пластины и цилиндрической оболочки с прямолинейной осью.

1.Колебания тонких пластин [4].

В этом случае безмоментная теория дает обобщенное плоское напряженное состояние для u, v – проекцией вектора смещений на оси координат x, y, лежащих в плоскости пластины, и колебания как жесткого тела по оси z - нормали к пластине:

$$\left(\frac{w^2}{c_2^2} - Ax^2 - h^2\right) u + (1-A)xh\, v = \frac{q_x^-}{mh} + Bx\,\frac{q_z^+}{m} = b_1;$$

$$(1-A)xh\, u + \left(\frac{w^2}{c_2^2} - Ah^2 - x^2\right) v = \frac{q_y^-}{mh} + Bh\,\frac{q_z^+}{m} = b_2;$$

$$\frac{w^2}{c_2^2}\, w = \frac{q_z^-}{mh} + x\,\frac{q_x^+}{m} + h\,\frac{q_y^+}{m} = b_3.$$

Здесь

$$w = \frac{\partial}{\partial t},\quad x = \frac{\partial}{\partial x},\quad h = \frac{\partial}{\partial y},\quad A = 4(1-g),\quad B = 1-2g,$$

$$g = \frac{c_2^2}{c_1^2},\quad c_1^2 = \frac{l+2m}{r},\quad c_2^2 = \frac{m}{r},\quad \Delta = x^2 + h^2,$$

l, m - коэффициенты Ляме, r – объемная плотность.

Решением этой системы будет

$$\left[\frac{w^2}{c_2^2}-\Delta\right]\left[\frac{w^2}{c_2^2}-A\Delta\right]\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\left[\frac{w^2}{c_2^2}-\left(Ah^2+x^2\right)\right]b_1-(1-A)xh\,b_2\\-(1-A)xh\,b_1+\left[\frac{w^2}{c_2^2}-\left(h^2+Ax^2\right)\right]b_2\end{Bmatrix}.$$

Однородные решения этой системы являются решениями волновых уравнений с двумя скоростями c_2 и $c_2\sqrt{A}$, не требующих асимптотических оценок, так как они являются двучленными и упрощению не подлежат. Более того, ясно, что малым Δ соответствуют малые w, что позволяет говорить о малых значениях показателя экспонент, которые описывают напряженно-деформированное состояние тонкой пластины в рамках теории упругости.

Изгибные колебания могут быть получены корректно только в моментной теории, которая приводит к уравнению изгибных колебаний следующего вида:

$$\left\{\frac{w^2}{c_2^2}+\frac{h^2}{6}\left[g\,\frac{w^4}{c_2^4}-(A-B)\frac{w^2}{c_2^2}\Delta+2A\Delta\Delta\right]\right\}w = b_3.$$

Если ввести безразмерные переменные (l – база нагружения)

$$t=\frac{c_2t}{l},\quad \bar{x}=\frac{x}{l},\quad \bar{y}=\frac{y}{l},\quad e=\frac{h}{l},\quad \bar{w}=\frac{wl}{c_2},\quad \bar{\Delta}=\Delta l^2,$$

то уравнение для перемещения w примет вид:

$$\left[\bar{w}^2+\frac{e^2}{6}\left(g\bar{w}^4-(A-B)\bar{w}^2\bar{\Delta}+A\bar{\Delta}\,\bar{\Delta}\right)\right]w = [s_z]\frac{l^2}{2mh} \qquad (6)$$

Асимптотический анализ уравнения заключается в выделении медленных движений $\bar{w}^2=e^p w^{*2}$ $(p>0,\quad w^*=O(1))$ при длинноволновом характере изменения искомых функций, когда $\bar{\Delta}=e^q\Delta^*$ $(q>0,\quad \Delta^*=O(1))$, т.к. только при этих условиях разложение (2) даст достоверный результат. Умножая уравнение на e^s и сравнивая показатели степени e в каждом члене уравнения при $e\to 0$, получаем один двучленный оператор при нулевом значении показателя степени e $(p,q>0)$, что соответствует уравнению

$$r_s\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\Delta\Delta w=[s_z],\qquad D=\frac{Eh^3}{3(1-n^2)},\quad r_s=2rh, \qquad (7)$$

т.е. известному уравнению колебаний тонких пластин.

Теория С.П. Тимошенко [2] приводит к уравнению типа (6), которое дает два конечных значения фазовых скоростей при $(\Delta,w)\to\infty$, т.е.

является уравнением гиперболического типа. Она содержит гипотетические параметры, которые можно выбрать из условия близости значений этих скоростей соответствующим скоростям решения задачи в постановке точной теории упругости для слоя. Известно [5], что дисперсионное уравнение антисимметричных колебаний слоя дает предельными значениями частот при $(\Delta, w) \to \infty$, $w_1^2 = c_1^2\Delta$, $w_2^2 = c_R^2\Delta$ - (c_R - скорость волн Релея). Эти прямые в плоскости (w^2, Δ) являются асимптотами двух семейств дисперсионных кривых $w_n^2(\Delta)$, однако это есть единственное, что может уточнить теория С.П. Тимошенко, которая не является асимптотически корректной. Полное уравнение (6) не имеет практического интереса, т.к. полученное с сохранением членов порядка z^3 во всех искомых величинах оно содержит асимптотически неверные члены, которые для $0 \le g \le 0.5$ могут дать как действительные, так и комплексные значения фазовых скоростей, что приводит к эллиптичности оператора в (6). Только уравнение параболического типа (7) имеет смысл как длинноволновая асимптотика медленных движений, а бесконечное значение скоростей распространения волн есть плата за простую форму этого уравнения. Выводы в [4] и полученные на их основе результаты в [6] следует признать необоснованными.

2. Безмоментная теория тонких цилиндрических оболочек с прямолинейной осью.

Согласно общей теории, изложенной выше, безмоментная теория определяется матрицей 3-го порядка $\vec{m}_3$, элементы которой в цилиндрических координатах (r, j, x) имеют вид:

$$m_{11} = \frac{n^2}{r_0^2} - Ax^2 + w^2\frac{r}{m}, \qquad m_{12} = m_{21} = \frac{inx(1-A)}{r_0},$$
$$m_{13} = -m_{31} = -2B\frac{x}{r_0}, \qquad m_{22} = A\frac{n^2}{r_0^2} - x^2 + w^2\frac{r}{m}, \tag{8}$$
$$m_{23} = -m_{32} = \frac{-inA}{r_0^2}, \qquad m_{33} = \frac{A}{r_0^2} + w^2\frac{r}{m},$$

где r_0 - радиус оболочки,

$$w = \frac{\partial}{\partial t}, \quad in = \frac{\partial}{\partial j}, \quad x = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\vec{u} = \vec{u}_n(r_0)\, e^{wt}\, e^{inj}\, e^{xx}, \qquad \vec{u}_n = \{u, v, w\}^T, \qquad i = \sqrt{-1},$$

т.е. уравнения движения в перемещениях $\vec{u}(r_0)$ имеют вид:

$$\hat{m}_3\,\vec{u}(r_0) = \frac{[\vec{\sigma}_r]^n}{2h\mu}, \qquad [\vec{\sigma}_r]^n = [\sigma^{\,n}_{rr}, \sigma^{\,n}_{r\varphi}, \sigma^{\,n}_{r\xi}] \tag{9}$$

Тогда уравнением для определения каждого из смещений будет определитель $|\hat{m}_3|$:

$$\begin{aligned}|\hat{m}_3| \;=\; & \frac{1}{r_0^4}An^2(n^2+1)\frac{\omega^2}{c_2^2} \;+\\ + \;& \frac{1}{r_0^2}\left[\left(\left(1+An^2\right)+A\right)\frac{\omega^4}{c_2^4}-\left(5A+2n^2A-4\right)\xi^2\frac{\omega^2}{c_2^2}+4(A-1)\xi^4\right]+\\ + \;& \left(-\xi^2+\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left(-A\xi^2+\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\frac{\omega^2}{c_2^2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Особый интерес представляет осесимметричная $(n=0)$ и антисимметричная деформация $(n=1)$ оболочки, которые определяют смещения оси цилиндрической оболочки

$$\vec{u}_c = S^{-1}\iint\limits_S \vec{u}(r,\varphi,\xi,t)\,dy\,dz$$

или, в проекциях на оси прямоугольной системы координат x,y,z :

$$\begin{aligned} u_{cx} &= u_0(r_0,\xi),\\ u_{cy} &= S^{-1}\iint\limits_S\left[v_1(r,\varphi,\xi,t)\cos\varphi + w_1(r,\varphi,\xi,t)\sin\varphi\right]r\,dr\,d\varphi = v_1^c + w_1^s,\\ u_{cz} &= S^{-1}\iint\limits_S\left[-v_1(r,\varphi,\xi,t)\sin\varphi + w_1(r,\varphi,\xi,t)\cos\varphi\right]r\,dr\,d\varphi = -v_1^s + w_1^c.\end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, на смещение осевой линии не влияют перемещения $v_{0,}\, w_{0,}\, u_1$ - эти смещения определяют движение срединной поверхности оболочки.

а) Уравнение (9) при $n=0$ имеет вид:

$$\left[\frac{A}{r_0^2}\left(\frac{\omega^2}{c_2^2}-\frac{E}{\mu}\xi^2\right)+\frac{\omega^2}{c_2^2}\left(\frac{\omega^2}{c_2^2}-A\xi^2\right)\right]\begin{Bmatrix}u_0\\ w_0\end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\mu h}\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{\omega^2}{c_2^2}+\dfrac{A}{r_0^2}\right)[\sigma^{\,0}_{r\xi}]+2B\dfrac{\xi}{r_0}[\sigma^{\,0}_{rr}]\\ \left(\dfrac{\omega^2}{c_2^2}-A\xi^2\right)[\sigma^{\,0}_{rr}]-2B\dfrac{\xi}{r_0}[\sigma^{\,0}_{r\xi}]\end{Bmatrix} \tag{12}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c_2^2}-\xi^2\right)v_0 = \frac{1}{2\mu h}[\sigma^{\,0}_{r\varphi}],$$

(здесь $E=2\mu(1+\nu)$ - модуль Юнга).

Асимптотический анализ уравнений (12) начинается с введения безразмерных переменных :

$$\bar{w} = \frac{wl}{c_2}, \quad \bar{x} = xl, \quad e_1 = \frac{h}{r_0}, \quad e_2 = \frac{r_0}{l}.$$

Тогда уравнение для $u_{0,}$ w_0 примет безразмерный вид:

$$\left[A\left(\bar{w}^2 - \bar{x}^2 \frac{E}{m}\right) + e_2^2 \bar{w}^2 (\bar{w}^2 - A\bar{x}^2)\right] \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{r_0}{2me_1} \begin{Bmatrix} \left(e_2^2 \bar{w}^2 + A\right)[s_{rx}^{0}] + 2B\bar{x}e_2[s_{rr}^{0}] \\ \left(e_2^2 \bar{w}^2 - A\bar{x}^2 e_2^2\right)[s_{rr}^{0}] - 2B\bar{x}e_2[s_{rx}^{0}] \end{Bmatrix}$$

Вводя обозначения $\bar{x}^2 = e_2^q x^{*2}$ $(q > 0)$, $\bar{w}^2 = e_2^p w^{*2}$, умножая уравнение на e_2^s и суммируя показатели степени при e_2, имеем выражения

$$p + s \ge 0, \quad q + s \ge 0, \quad 2p + 2 + s \ge 0, \quad p + q + 2 + s \ge 0,$$

из которых только комбинация $p + s = 0$, $q + s = 0$ дает показатели $p = q > 0$ $(s = -1)$, что определяет медленные переменные. Таким образом, асимптотически достоверными операторами над осесимметричными смещениями являются

$$A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2rh} \begin{Bmatrix} A[s_{rx}^{0}] \\ -2Bxe_2[s_{rr}^{0}] \end{Bmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v_0 = \frac{1}{2rh}[s_{rj}^{0}], \qquad c_0^2 = \frac{E}{r}, \quad c_2^2 = \frac{m}{r}. \tag{13}$$

Это известные уравнения продольных и крутильных колебаний осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки [5], которые выделены из уравнений (12) типа С.П.Тимошенко. Как видно, теория С.П. Тимошенко, т.е. сохранение всех членов уравнения (12), асимптотически неточна, поэтому полученные на ее основе выводы подлежат сомнению.

б) $n = 1$ – антисимметричная деформация.

Основное уравнение

$$|\hat{m}_3|\vec{u}_1 = \Big\{ \frac{2Aw^2}{r_0^4 c_2^2} + \frac{1}{r_0^2}\left[(1+2A)\frac{w^4}{c_2^4} - (7A-4)x^2 \frac{w^2}{c_2^2} + 4(A-1)x^4\right] -$$

$$-\left(x^2 - \frac{w^2}{c_2^2}\right)\left(Ax^2 - \frac{w^2}{c_2^2}\right)\frac{w^2}{c_2^2} \Big\}\vec{u}_1 = \frac{1}{2mh}\hat{W}[\vec{s}_r]^1,$$

где $\hat{W}$ - матрица 3-го порядка, $[\vec{s}_r]^1 = \{[s_{rx}^{1}], [s_{rj}^{1}], [s_{rr}^{1}]\}^T$, после перехода к безразмерным переменным имеет вид:

$$\{ 2A\overline{w}^2 + e_2^2\left[(1+2A)\overline{w}^4 - (7A-4)\overline{x}^2\overline{w}^2 + 4(A-1)\overline{x}^4\right] -$$

$$-\left(\overline{x}^2 - \overline{w}^2\right)\left(A\overline{x}^2 - \overline{w}^2\right)e_2^4\overline{w}^2 \} \;\overset{\mathbf{r}}{u}_1 \;=\; \frac{r_0^4}{2l^2h}\overset{)}{W}\,[\overset{\mathbf{r}}{s}_r]^1.$$

Проведя асимптотический анализ подобно вышеизложенному, можно показать, что малым величинам x^2, w^2 $(p,q>0)$ соответствует оператор (при $[s^1_{rx}]=[s^1_{rj}]=0$):

$$2A\left[\frac{1}{r_0^4c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2(A-1)}{r_0^2A}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2mh}\begin{Bmatrix} \Omega_{13} \\ \Omega_{23} \\ \Omega_{33} \end{Bmatrix}[s^1_{rr}], \qquad (14)$$

причем

$$\Omega_{13} = \frac{A(1-A)x}{r_0^3} + \frac{2Bx}{r_0}\left(\frac{A}{r_0^2} - x^2 + r\frac{w^2}{m}\right) \approx -\frac{Ax}{r_0^3}$$

$$\Omega_{23} = -\frac{iA}{r_0^2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{A}{r_0^2}x^2 + rw^2 + \frac{2Bx}{r_0}\;\frac{ix(1-A)}{r_0}\right) \approx -\frac{iA}{r_0^4}$$

$$\Omega_{33} = \left(\frac{1}{r_0^2} - Ax^2 + rw^2\right)\left(\frac{A}{r_0^2} - x^2 + rw^2\right) + \frac{(1-A)^2}{r_0^2}x^2 \approx \frac{A}{r_0^4}.$$

Полученное в результате анализа упрощенное уравнение совпадает с классическим уравнением колебаний цилиндрической трубы как балки

$$r\,S\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + EI_z\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = \left[s^1_{rr}\right]S,$$

$I_x = 2phr_0^3$ - момент инерции поперечного сечения.

Таким образом, достоверным уравнением движения балки в виде цилиндрической оболочки будет известное уравнение Бернулли, и никакие эффекты, которые реализует полное уравнение типа С.П.Тимошенко, не должны иметь место в приближении степенных рядов до третьего порядка по n включительно. В оболочке развиваются продольные, крутильные и изгибные колебания с известными физическими закономерностями [5].

Список используемой литературы

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек.-М.:Наука,1976.-510с.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости - Киев: Наукова думка,1972.-504с.
3. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. - Запорожье: Изд-во ЗГИД,1997.-169с.
4. Тищенко В.Н. Колебания упругих тонких пластин. Сб. Динамические системы, вып.15-Симферополь: КФТ, 1999г.с.84-91.

5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, т.3, под редакцией И.А.Биргера, Я.Г.Пановко.-М.:Машиностроение,1968г.-568с.
6. Тищенко В.Н. Колебания призматического стержня. Сб. Динамические системы, вып.16 – Симферополь:КФТ,2000г.-с.98-106.

Поступила в редколлегию 06.09.2001 г.