

УДК 539.3

Е. Н. ДОВБНЯ, канд. физ.-мат. наук, Донецкий нац. ун-т

К ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ МОДУЛЯ СДВИГА НА КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Представлены результаты численных расчетов по выявлению пределов применения формул для специально-ортотропных материалов при расчете оболочек с круговыми отверстиями, изготовленных из реальных ортотропных материалов.

Вопросы расчета оболочечных конструкций с концентраторами напряжений (отверстия, разрезы, включения и т. д.) – одна из важнейших проблем современной техники. Из-за трудностей математического и вычислительного характера многие авторы [1] при исследовании ортотропных оболочек применяют дополнительное ограничение на материал оболочки, полагая, модуль сдвига G_{12} не является независимым параметром, а выражается через модули Юнга и коэффициенты Пуассона, как и в случае изотропии

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{n_1 n_2})}, \quad (1)$$

где $E = \sqrt{E_1 E_2}$; $n = \sqrt{n_1 n_2}$; E_1, E_2 - модули Юнга; n_1, n_2 - коэффициенты Пуассона; G_{12} - модуль сдвига для плоскостей, параллельных срединной поверхности оболочки.

Используемая в настоящей работе методика не налагает подобных ограничений. Это позволяет проанализировать влияние соотношения (1) на результаты численных расчетов концентрации полей напряжений и деформаций на контуре кругового отверстия в ортотропных оболочках.

Рассмотрим ортотропную оболочку постоянной толщины h , отнесенную к системе ортогональных координат x, y с осями вдоль направлений упругой и геометрической симметрии. Оболочка ослаблена круговым отверстием с контуром L , уравнение которого имеет вид

$$x = x(s) = r_0 \cos\left(\frac{s}{r_0}\right), \quad y = y(s) = r_0 \sin\left(\frac{s}{r_0}\right), \quad s \in [-l, l], \quad (2)$$

где l – полудлина контура отверстия; r_0 - радиус отверстия. В полярных координатах

$$x = r_0 \cos(J), \quad y = r_0 \sin(J), \quad J \in [0, 2\pi).$$

Искомые напряжения представим в виде сумм напряжений в оболочке без отверстия при заданной внешней нагрузке (в дальнейшем они будут обозначаться величинами со звездочкой) и напряжений от возмущенного поля, вызванного наличием отверстия. Рассмотрим случай неподкрепленного отверстия, прикрытого крышкой специальной конструкции, компенсирующей действие перерезывающей силы [2, 3].

Преобразуем граничные условия для возмущенного поля, задав на контуре L компоненты главного вектора \vec{P} и главного момента $\vec{M}^{(s)}$ усилий, действующих вдоль части L_s контура L с концом в текущей точке s , относительно этой точки. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} P_x &= -P_x^*; & P_y &= -P_y^*; & P_z &= 0; \\ M_x^{(s)} &= -M_x^{(s)*}; & M_y^{(s)} &= -M_y^{(s)*}, \end{aligned} \quad (3)$$

где P_x, P_y, P_z - компоненты главного вектора усилий, действующих на L_s ; $M_x^{(s)}, M_y^{(s)}, M_z^{(s)}$ - компоненты главного момента этих усилий относительно точки s .

Рассматриваемая задача в работе [4] сведена к системе пяти граничных интегральных уравнений. Первые четыре из них имеют вид

$$\begin{aligned} \int_L \sum_{j=1}^5 K_{ij} ((x(t) - x(J))/c, y(t) - y(J)) \mathcal{Y}_j(J) ds(J) &= p^2 F_i^*(t) \\ (t \in [0, 2p), i = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (4)$$

При этом

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{Eh(1-m)}{a} \left(\frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}s} - n_2 \frac{l}{R_2} w \right); & y_2 &= \frac{Eh(1-m)}{a} \left(\frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}s} + n_1 \frac{w}{R_2} \right); \\ y_3 &= \frac{Eh(1-m)}{a} \frac{1}{c^2 R_2} \frac{\mathcal{I}q_1}{\mathcal{I}s}; & y_4 &= \frac{Eh(1-m)}{a} \frac{1}{c^2 R_2} \frac{\mathcal{I}q_2}{\mathcal{I}s}; \\ y_5 &= \frac{Eh(1-m)}{a} \frac{1}{c R_2} (n_1 q_1 + l n_2 q_2); \end{aligned}$$

$$c^2 = \sqrt{E_1 / E_2}; \quad m = 1 - 2(1+n)G_{12} / E;$$

$$a = 1 - (m - mn) / 2; \quad c^2 = \sqrt{12(1-n^2)} / R_2 h; \quad l = R_2 / R_1;$$

u, v, w - компоненты вектора перемещений; n_1, n_2 - направляющие косинусы вектора внешней нормали к L ; q_1, q_2 - углы поворота этого вектора; R_1, R_2 - радиусы главных кривизн оболочки.

Ядра системы (4), полученные в работе [4], имеют вид двойных рядов, содержащих специальную функцию $G_{n,m}(z)$. Они регулярны или имеют логарифмическую особенность.

Система (4) содержит четыре уравнения и пять неизвестных функций. В работе [4] в качестве пятого использовалось уравнение, соответствующее третьей составляющей главного момента (в этом случае матрица ядер получается симметричной). С целью улучшения сходимости метода механических квадратур при численном решении системы уравнений в качестве пятого уравнения будем брать дифференциальное соотношение, связывающее неизвестные функции [5].

Система (4) содержит шесть неизвестных постоянных c_i ($i = \overline{1, 6}$). Для их определения используются следующие дополнительные соотношения, вытекающие из условий однозначности перемещений и углов поворота при обходе контура:

$$\begin{aligned} \int_L y_3 ds = 0; \quad \int_L y_4 ds = 0; \\ \int_L (y_5 - c(xy_4 - Iy_3)) ds = 0; \quad \int_L (xy_3 + y_4) ds = 0; \\ \int_L \left(y_1 - \frac{c^2}{2} ((y^2 - Ix^2)y_3 - 2Ixy_4 + 2\frac{y}{c}y_5) \right) ds = 0; \\ \int_L \left(y_2 + \frac{c^2}{2} ((y^2 - Ix^2)y_4 + 2xy_3 + 2\frac{x}{c}y_5) \right) ds = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если предположить, что модуль сдвига G_{12} зависит от других параметров ортотропии и определяется из соотношения (1), характерного для изотропных материалов, ядра интегральных уравнений (4) резко упростятся.

В качестве примера рассмотрены сферическая оболочка, находящаяся под действием равномерного внутреннего давления и оболочки различной гауссовой кривизны, находящиеся под действием равномерной растягивающей нагрузки вдоль оси OX . Контур отверстия загружен перерезывающими усилиями, в результате действия которых $P_z = 0$ на L [2]. Система (4), (5) решалась численно с использованием специальных квадратурных формул [6].

На рис. 1 изображен график изменения $e_t^0 = \frac{2Eh}{pR} e_t$ (e_t - деформация

в касательном направлении на контуре отверстия, R - радиус оболочки) в зависимости от параметра m при $b = cr_0 = 1$ для сферической оболочки, находящейся под действием равномерного внутреннего давления интенсивности p .

Кривые 1-4 относятся к материалам с отношением модулей Юнга E_1/E_2 , равным соответственно 1, 2, 3, 4. При этом n полагается равным 0.3. Сплошные и штриховые линии относятся к точкам контура отверстия, для которых угол J равен 0 и $p/2$.

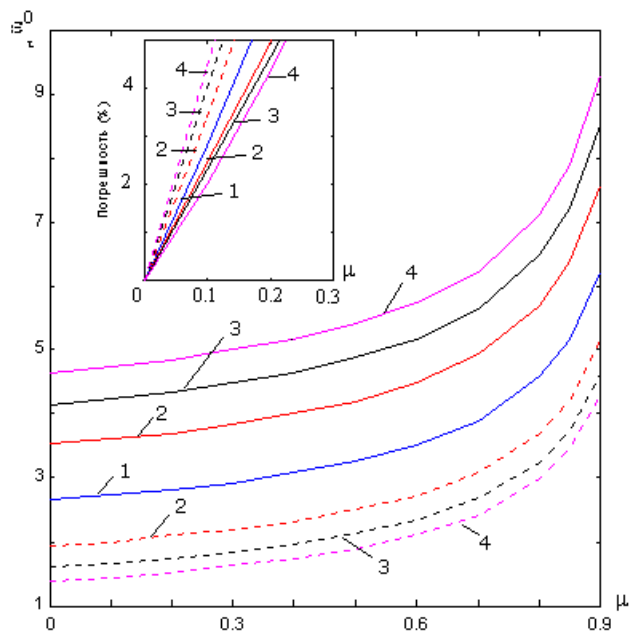


Рис. 1

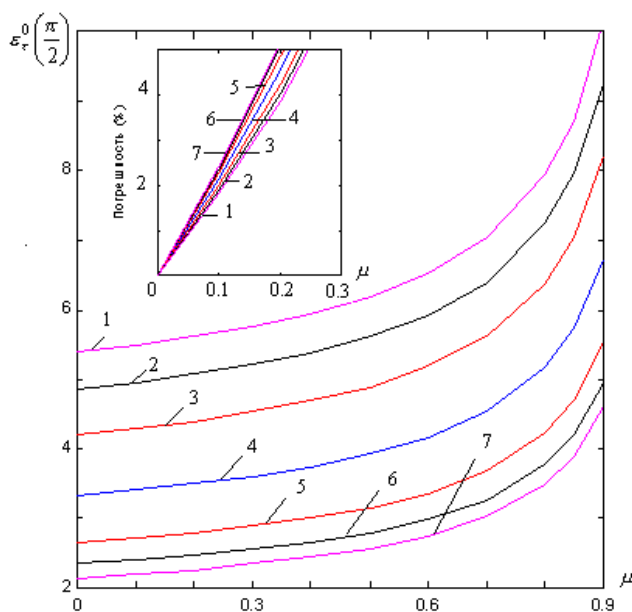


Рис. 2

На рис. 2 и 3 приведены графики изменения $e_t^0 = \frac{E}{p} e_t$ при J равном $p/2$ для оболочек, находящихся под действием равномерной растягивающей нагрузки вдоль оси OX . Расчеты проводились для оболочек с отношением радиусов главных кривизн I равным 0.1 (рис.2) и 0.5 (рис.3).

Кривые 1-7 относятся к материалам с отношением модулей Юнга, равным соответственно 1/2, 1/3, 1/4, 1, 2, 3, 4. Как и в предыдущем случае n полагается равным 0.3, $b = 1$.

Как следует из полученных результатов, характер влияния коэффициента m на величину касательной деформации существенно

зависит от отношения модулей Юнга. Погрешность в результате использования соотношения (1) выше 5% при $m \geq 0.25$ и не превышает 5% при $m \leq 0.1$ во всех рассмотренных случаях. При этом погрешность увеличивается прямо пропорционально отношению E_1/E_2 .

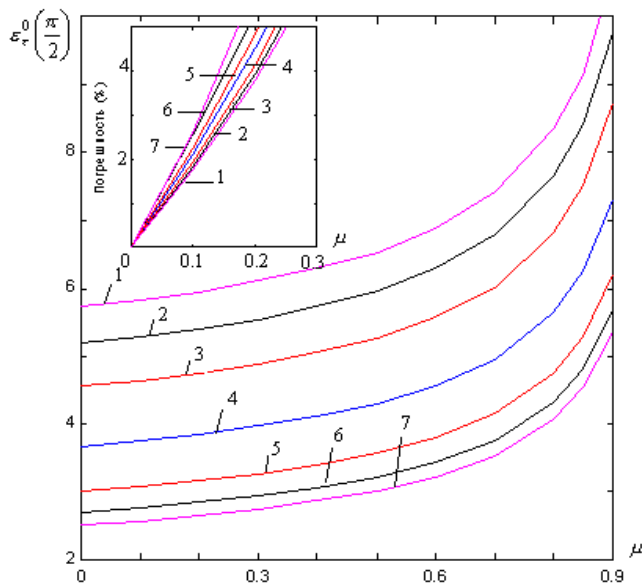


Рис. 3

Список использованной литературы

1. Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В.П.Шевченко. – К.: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7.).
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. К, 1968. 887с.
3. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. Н. и др. К., 1980. – 636 с. (Методы расчета оболочек: в 5т. Т.1).
4. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек положительной кривизны с разрезами и отверстиями // Теорет. и прикл. механика. 1997. Вып.26. С.59-69.
5. Довбня Е.Н. Деформация контура кругового отверстия в ортотропных оболочках при растягивающей нагрузке // Вісник Донецького ун-ту. Сер.А - N 1. - 2000. - С. 51-55.
6. Довбня Е.Н. Численное решение системы граничных интегральных уравнений с логарифмической особенностью в задачах теории оболочек с отверстиями // Динамические системы. 1999. 15. С. 122-127.
7. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. Л., 1980. 247с.

Поступила в редколлегию 16.08.2001 г.