УДК 62.50

С.А. ДУБОВИК, канд.техн.наук, СевГТУ

МЕТОД КОМПОЗИЦИИ В СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Для сингулярно возмущенных систем линейных дифференциальных уравнений предложен простой способ синтеза эффективной обратной связи. Метод основан на вычислении оценки критического значения малого параметра, фигурирующего в теореме Климушева – Красовского. Приводится пример синтеза.

Эффективность систем управления определяют обычно три основные категории - устойчивость, качество (или точность) и грубость. Замечательная особенность классической теории управления состоит как раз в том, что ее методы позволяют проектировать эффективную систему управления в указанном смысле, причем, достаточно простыми средствами. В современной теории многомерных систем такой возможности пока нет. В работах [1-3] показано, что широко известный метод квадратического критерия, обеспечивающий асимптотическую устойчивость управляемой и наблюдаемой системы, для сингулярно возмущенных объектов
может успешно использоваться как средство достижения заданного качества синтезируемой системы. Тем не менее, вопрос грубости замкнутой системы остается открытым. В настоящей работе для систем указанного класса предлагается метод синтеза эффективного закона стабилизации.

Пусть задана линейная стационарная сингулярно возмущенная система, содержащая скалярное управление и удовлетворяющая условию управляемости. В таких предположениях систему сразу можно представить в канонической форме сингулярных возмущений (КФСВ) [2,4], в результате чего задача синтеза сводится к выбору коэффициентов полинома a в замкнутой системе

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{A}\tilde{X}, \quad \tilde{X}(0) = x, \qquad (1)$$
$$\tilde{A} = \tilde{J} - \tilde{b}\,a, \quad a = (a_0, a_1),$$

где структура матриц определяется КФСВ, то есть формулами

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{X}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}_0 \in R^m, \quad \tilde{X}_1 \in R^k, \quad \tilde{X} \in R^n, \quad n = m + k,$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_0 & E \\ 0 & \dfrac{\tilde{J}_1}{l} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e_k}{l} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\tilde{J}_0 = (0,\ e_{m1}, ...,\ e_{m(m-1)}), \quad \tilde{J}_1 = (0,\ e_{k1}, ...,\ e_{k(k-1)}),$$

$$E = e_m e_{k1}, \quad a_0 = (a_{00}, a_{01}, ..., a_{0(m-1)}),$$

$$a_1 = (a_{10}, a_{11}, ..., a_{1(k-1)}),$$

m, k - целые положительные, e_{ij} - вектор размерности i, j-тый элемент которого есть единица, а остальные - нули, причем $e_i = e_{ii}$.

В (1),(2) $l > 0$ - малый параметр, а a - строка коэффициентов характеристического полинома, разбитая на блоки a_0 и a_1 в соответствии с разделением n-вектора состояния возмущенной системы (1) на m-подвектор $\tilde{X}_0$ "медленных" (внешних) переменных и k-подвектор $\tilde{X}_1$ "быстрых" переменных. Далее мы не будем различать унитарные полиномы и строки, составленные из их коэффициентов.

В теории управления известно множество методов синтеза, отличающихся по форме представления исходных данных и по способу получения решения. Все эти решения, как правило, достаточно сложны, что не позволяет использовать их в условиях изменения исходных данных для оперативной коррекции управления.

Предлагаемое возмущенное представление управляемого процесса имеет одно очень важное преимущество - оно позволяет осуществить синтез на основе некоторой операции сборки, то есть соединения целого из частей. В рамках данной статьи речь пойдет о некотором простом правиле композиции замкнутой системы из двух блоков.

Пусть система (1),(2) - тихоновская, то есть имеет гурвицев полином a_1. Тогда динамика "медленных" переменных аппроксимируется вырожденной системой с характеристическим (внешним) полиномом [2]

$$f_0(a) = \frac{a_0}{a_{10}}. \tag{3}$$

Если этот полином также гурвицев, то существует такое $l_* > 0$, что для любого $l < l_*$ система (1), (2) асимптотически устойчива. Этот результат, известный как теорема Климушева-Красовского [5], содержит в себе элемент сборки - из двух устойчивых блоков получается устойчивая система, причем по внешним переменным асимптотически реализуется динамика, качеством которой можно управлять, в силу

(3), посредством параметров a_0 и a_{10}. Практически полезной такая процедура синтеза оказывается только в том случае, когда критическое значение параметра l_* получается не очень малым. Можно сказать, что при таком подходе к синтезу l_* является мерой грубости замкнутой системы (1), (2) - чем больше l_*, тем менее жесткой и чувствительной является система (1), (2). К сожалению, точное вычисление l_* для многомерной системы вряд ли возможно. Однако, существует возможность оценки критического значения параметра. Прежде чем переходить к изложению основного результата, рассмотрим пример, иллюстрирующий целесообразность такой постановки задачи.

Пусть в системе (1), (2) 4-го порядка $m=2$, $l=1$, и заданы два блока: $a_0=(0.1, 0.5)$, $a_1=(1, 5)$. Полиномы $a_1=(a_{10}, a_{11})$ (то есть $s^2+a_{11}s+a_{10}=s^2+5s+1$) и $f_0(a)=\dfrac{a_0}{a_{10}}=(0.1, 0.5)$ здесь, очевидно, гурвицевы. При $l<l_*$ тем самым обеспечивается асимптотическая устойчивость возмущенной системы и качество по внешним переменным, определяемое элементами блока a_0. В данном случае критическое значение $l_*=\dfrac{2.5}{2.75}\cong 0.9091$ и при $l=1$ система неустойчива. В [6] показано, как с помощью квадратического критерия стабилизировать систему малыми изменениями коэффициентов в обратной связи. Так, в рассматриваемом примере коэффициенты

$$a=(a_0, a_1)=(0.1, 0.5308, 1.1586, 5.0514)$$

обеспечивают замкнутой системе асимптотическую устойчивость. Однако, такая формальная стабилизация вряд ли может быть признана эффективным решением задачи синтеза, так как в итоге получается негрубая система - ее динамика существенно меняется при малых вариациях параметров. Значительно лучших результатов можно добиться, если иметь оценку l_* в функции параметров системы. Тогда появляется возможность максимизации l_* в области допустимых значений параметров. При этом вариации параметров могут быть согласованы с требованиями к качеству, определяемыми в данном случае отношениями $\dfrac{a_{00}}{a_{10}}$ и $\dfrac{a_{01}}{a_{10}}$.

Перейдем к построению процедуры оценки критического значения l_*. Приравнивая характеристический полином возмущенной системы (1), (2) к нулю и домножая полученное уравнение на l^k, получим следующее эквивалентное соотношение:

$$l^k s^n + l^{k-1} a_{1(k-1)} s^{n-1} + l^{k-2} a_{1(k-2)} s^{n-2} + \ldots + l\, a_{11} s^{n-k+1} +$$
$$+ a_{10} s^{n-k} + a_{0(m-1)} s^{m-1} + \ldots + a_{01} s + a_{00} = 0. \qquad (4)$$

Будем рассматривать это равенство как асимптотическое по параметру l, имея в виду, что оно совпадает с асимптотическим разложением (4) порядка k. Главный член этой асимптотики есть внешний полином $f_0(a)$ (после приведения к унитарному виду). Нас же будет интересовать асимптотическое разложение в (4) первого порядка:

$$l\, a_{11} s^{m+1} + a_{10} s^m + a_{0(m-1)} s^{m-1} + \ldots + a_{01} s + a_{00} = 0,$$

с помощью которого и будем строить оценку критического параметра, которую обозначим l_{1*}. Переходя в последнем равенстве к унитарному полиному и обозначая еще $J = \dfrac{1}{l}$, будем иметь:

$$s^{m+1} + J(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \qquad (5)$$

где

$$a_m = \frac{a_{10}}{a_{11}}, \quad a_{m-i} = \frac{a_{0(m-i)}}{a_{11}}, \quad i = 1,2,..,m. \qquad (6)$$

Объединим эти коэффициенты в строку: $a = (a_0, a_1, \ldots, a_m), \quad a^T \subset R^{m+1}$.

Соотношение (5) допускает простое построение области устойчивости по параметру J, который временно будем считать комплексным [7]. Для границы D - разбиения сразу получим ($j^2 = -1$):

$$J = J(jw, a) = -\frac{(jw)^{m+1}}{R_m(w,a) + jV_m(w,a)} =$$
$$= \operatorname{Re} J(jw) + j \operatorname{Im} J(jw) = -\frac{G_m(jw)}{R_m^2(w) + V_m^2(w)}, \qquad (8)$$

где

$$R_m(w,a) = a_0 - a_2 w^2 + \ldots + (-1)^r a_{2r} w^{2r},$$
$$V_m(w,a) = a_1 w - a_3 w^3 + \ldots + (-1)^l a_{2l+1} w^{2l+1},$$
$$G_m(jw) = (jw)^{m+1}\left[R_m(w) - jV_m(w)\right], \qquad (9)$$

а для $r, l,$ и m справедливы соотношения

$$r = \begin{cases} \dfrac{m}{2} = l+1, & \text{\textit{если}} \quad m - \text{\textit{четное}}\ (\text{\textit{существует целое}}\ k = \dfrac{m}{2}) \\ \dfrac{m-1}{2} = l, & \text{\textit{если}}\ m - \text{\textit{нечетное.}} \end{cases} \qquad (10)$$

Зависимость от a здесь и далее будем опускать, если это возможно.

Обозначим слагаемые с наивысшими степенями w в мнимых частях числителя и знаменателя J соответственно $g_m(w)$ и $d_m(w)$. Из (9),(10) будем иметь независимо от четности: $g_m(w) = a_m w^{2m+1}$, $d_m(w) = a_m^2 w^{2m}$ и, далее, $\operatorname{Im} J\ (jw) = \dfrac{-\operatorname{Im} G_m(jw)}{R_m^2(w) + V_m^2(w)}$, поэтому существует конечный предел:

$$\lim_{w\to\infty} \frac{\operatorname{Im} J(jw)}{w} = -\frac{a_m}{a_m^2} = -\frac{1}{a_m}. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение множество Ω частот, при которых годограф D-разбиения пересекает вещественную ось: $\Omega = \{\overline{w} : \operatorname{Im} J\,(j\overline{w}) = 0\}$. Значения параметра $J(jw)$ на множестве Ω вещественны, поэтому среди них можно выбрать наибольшее

$$q = \max_{w\in\Omega} J\,(jw). \tag{12}$$

В силу (11), ветвь годографа D- разбиения, исходящая из точки q, при последующем увеличении частоты уходит в четвертый квадрант, так что область вещественных значений параметра $J > q$ является областью устойчивости. Отсюда следует, что $l_{1*} = \dfrac{1}{q}$ есть искомая оценка критического значения параметра возмущений, введенная выше. Для того чтобы вычислить ее, остается заметить, что для точек множества Ω либо $w = 0$, либо $R_m(w) = 0$ при m - четном и $V_m(w) = 0$ при m - нечетном. Теперь из (8)-(10),(12) окончательно следует: $l_{1*} = \dfrac{1}{q}$, где

$$q = q\,(a) = \begin{cases} \max\limits_{R_m(w,a)=0} \ (-1)^{k+1} w^{m+1} / V_m(w,a) & \text{при } m = 2k, \\ \max\limits_{V_m(w,a)=0} \ (-1)^{k} w^{m+1} / R_m(w,a) & \text{при } m = 2k+1. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь при каждом фиксированном a максимум ищется на множестве корней соответствующего уравнения.

Функция (13) показывает, как корректировать параметры системы для повышения ее эффективности. Так, для рассмотренной выше системы 4-го порядка $q\,(a) = q\,(a_0, a_1, a_2) = a_0 /(a_1 a_2)$, откуда следует, что

$$l_{1*} = l_{1*}(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}) = a_{01} a_{10} /(a_{00} a_{11}) = 0.5/0.5 = 1 \tag{14}$$

(вспоминаем, что точное значение $l_* = 0.9091$). Это означает, что для повышения грубости системы коэффициенты a_{01}, a_{10} нужно увеличивать, а a_{00}, a_{11} - уменьшать. Функция 4-х переменных (14) дифференцируема при положительных значениях аргументов. Обозначая ее частные производные $l_{ij} = \partial\, l_{1*} / \partial a_{ij}$, $i, j = 0{,}1$, вычислим их при заданных значениях коэффициентов. Будем иметь:

$$l_{00} = -10.0\,, \qquad l_{01} = 2.0\,, \qquad l_{10} = 1.0\,, \qquad l_{11} = -0.2\,.$$

В соответствии с этими значениями производных можно корректировать коэффициенты характеристического полинома с учетом требования их положительности. Последнее означает, в частности, что коэффициент a_{00} не может существенно варьироваться, несмотря на максимальную по модулю производную по этому коэффициенту. Выбирая $a = (a_0, a_1) = (0.09,\ 0.7,\ 1.35,\ 4.2)$, получим в соответствии с (14) $l_{1*} = 2.5$, то есть критическое значение увеличено в 1.5 раза. Это приводит и к существенному улучшению качества системы, что легко подтверждается моделированием. В заключение заметим, что для коэффициента a_{11} существует более строгое ограничение на его уменьшение по модулю – возможность аппроксимации (4) асимптотикой первого порядка. Но в данном случае такие изменения этого коэффициента и не требуются, о чем свидетельствует величина частной производной l_{11}.

Список использованной литературы

1. Дубовик С.А. Композиционный синтез линейно-квадратических регуляторов // Проблемы управления и информатики.-1999.- № 2.- С.50-62.
2. Дубовик С.А. Аналитическое конструирование регуляторов для сингулярно возмущенных систем // Проблемы управления и информатики.-1999.- № 5.- С.54-68.
3. Дубовик С.А. Синтез линейных сингулярно возмущенных систем //Динам. системы.- 1999.- Вып.15.- С.45-49.
4. Дубовик С.А. Синтез сингулярно возмущенных систем на основе канонических представлений // Вестник СевГТУ: Сб. научн. тр.- Севастополь, 1998.- Вып.14.- С.68-72.
5. Климушев А.И., Красовский Н.Н. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ПММ. - 1961.- Т.25.- № 4.- С.680-689.
6. Дубовик С.А., Прозорова А.Ю. Алгоритм грубого распределения корней в линейной системе // Вестник СевГТУ: Сб. научн. тр.- Севастополь, 1998.- Вып.14.- С.18-21.
7. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы.- М.: Наука, 1978.- 336с.

Поступила в редколлегию 16.07.2001 г.