2. Orlov I.V. A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces // Operator Theory. Advances & Appl. -V.118. - Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2000. - P.321-333.
3. Орлов И.В. Теорема Макки-Аренса для шкал пространств //Динамические системы. - Симферополь: «КФТ», 2000. - Вып.16. - С.165-171.
4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. - М.: Мир, 1969. - 1072 с.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971. - 360с.
6. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир. 1971.- 392 с.

Поступила в редколлегию 12.05.2001 г.

УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, док. физ.-мат. наук, Е.В. РОСКЛАДКА, асп.,
Полтавский гос. техн. ун-т

МНОГОУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА ОБСЛУЖИВАНИЯ КАК ЗАДАЧА ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Для одной задачи размещения объектов обслуживания на основе свойств множеств перестановок и полиразмещений в статье построена математическая модель и алгоритм ее решения.

Большое количество важных задач в различных отраслях при моделировании динамических систем адекватно описываются с помощью моделей оптимизационных задач на комбинаторных множествах [1-3].

Рассмотрим задачу размещений объектов обслуживания на фиксированном уровне системы обслуживания.

Пусть заданы матрица расстояний, элемент которой r_{ij} - расстояние между пунктами i и j, расчетное количество клиентов a_i в каждом населенном пункте и $q_1, q_2, ..., q_w$ - возможные емкости объектов (в количестве клиентов) обслуживания. Нужно так расположить объекты в пунктах, чтобы они были полностью загружены обслуживанием клиентов, находящихся в заданом радиусе обслуживания r с минимизацией количества необслуженых клиентов, обслуживание которых передается на следующий уровень динамической системы обслуживания.

Пусть $G=\{0,...,0,a_r,...,a_1\}=\{g_1,...,g_k\}$ - множество, которое имеет $h \le r+1$ разных элементов $g_1 \le ... \le g_k$, $g_1 = g_2 = ... = g_{k-r} = 0$,

$g_{k-r+1} = a_r, ..., g_k = a_1$.

Введем в рассмотрение вектор x – элемент множества перестановок [3] $E_k(G)$ вида $x = (x_1^1, ..., x_r^1, x_1^2, ..., x_r^2, ..., x_{(s-1)r+1}^s, ..., x_{rs}^s)$, $i \in J_s$, ($x_i^j = 0$, если пункт j не обслуживается объектом i, $x_i^j = a_i, i \in J_r$ в противном случае).

Введем вектор y - элемент множества полиразмещений [3] $E(Q,H)$, вида $y = (y_1^1, ..., y_w^1, y_1^2, ..., y_w^2, ..., y_1^s, ..., y_w^s)$, $y_i^j \in \{0, q_i, 2q_i, ..., k(i)q_i\} = Q_i$, $j \in J_s$ ($k(i)$ - количество одинаковых $q(i)$ объектов в пункте j).

Обозначим декартовое произведение множеств $E_k(G)$, $E(Q,H)$ $\mathcal{e} = E_k(G) \times E(Q,H)$, $z = (x,y) \in \mathcal{e}$, где $x \in E_k(G)$, $y \in E(Q,H)$.

Математическая модель задачи примет вид:
найти

$$\min_{z \in \mathcal{e}} \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^j - \sum_{i=1}^{w} y_i^j \right) \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^j - \sum_{i=1}^{w} y_i^j \geq 0, \forall j \in J_s; \quad r_{ij} \leq r,$$

тут i - номер пункта, который выбран для размещения объектов обслуживания.

Отметим, что $\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} x_i^j = \sum_{i=1}^{r} a_i$.

Построим алгоритм метода ветвей и границ для решения этой задачи евклидовой комбинаторной оптимизации [3].

Оценкой для множества допустимых решений при разветвлении $\mathcal{e}$ есть величина

$$v^j(t) = v^{j-1}(t) + \min\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^j - \sum_{i=1}^{w} y_i^j \right), \quad j \in J_s,\ t \in J_p, \qquad (2)$$

где j - уровень разветвления, p - количество веток.

Отсечение t-го допустимого решения проводим в том случае, если существует такое j, что

$$v^j(t) > \min\left(v^s(i)\right), \quad i \in J_{t-1}. \qquad (3)$$

Ветвление множества описано в алгоритме.

Алгоритм:

Шаг 1. t=1.

Шаг 2. j=1.

Шаг 3. Формируем множество $\{x^j(t)\}$ векторов $x^j(t)$, которые удовлетворяет условиям:

1) если $r_{ij} > r$, то $x_i^j = 0$;

2) если $r_{ij} \le r$, то x_i^j выбираем из множества $\{0, a_i\}$.

Шаг 4. Для каждого множества $\{x^j(t)\}$ определяем вектора y^j, которые удовлетворяют условию: $y_i^j \in Q_i, \forall i \in J_w$.

Шаг 5. Разветвляем вектор $x^j(t)$. Результатом разветвления есть вектора $x^{j+1}(t)$, для которых из условия $x_i^j = a_i$ вытекает $x_i^{j+1}(t) = 0$, $i \in J_r$, $j \in J_s$; $j = j + 1$

Шаг 6. Вычисляем оценки по формуле (2).

Шаг 7. Если выполняется условие (3), то вектор $x^j(t)$ исключается из рассмотрения и переходим к шагу 9.

Шаг 8. Если $j < s$, то переходим к шагу 5.

Шаг 9. Если $t < p$, то принимаем $t = t + 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 10. Оптимальное решение задачи определяет вектор x, которому соответствует $\min\left(v^s(i)\right), \forall i \in J_p$.

Шаг 11. Вычисляем оптимальное значение целевой функции (1).

Алгоритм запрограммирован на языке Turbo Pascal 7.0. Рассмотрим пример применения данного алгоритма к задаче размещений лечебных отделений. Величины r и w - заданы; остальные данные являются равномерно распределенными случайными величинами в интервале [0;50].

Пусть задано количество населенных пунктов $r = 4$. Известно, что количество больных, которые нуждаются в обслуживании для каждого населенного пункта соответственно равно $a_1 = 14$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$ и $a_4 = 6$ больных. Задано радиус обслуживания $r = 25$ и расстояния между населенными пунктами i и j:

$$r_{12} = 20,\ r_{13} = 30,\quad r_{14} = 28,\ r_{23} = 12,\quad r_{24} = 35,\ r_{34} = 40.$$

Дано, что в населенных пунктах необходимо построить лечебные отделения двух типов $q_1 = 12$, $q_2 = 5$ таким образом, чтобы минимизировать количество необслуживаемых больных на данном уровне.

$$Q_1 = \{0,12,24\},\ Q_2 = \{0,5,10,15,20,25,30,35\};\ |e| = 1{,}2 \cdot 10^3.$$

(Здесь и далее число элементов $|e|$ в множестве e дается с точностью до двух значащих цифр.)

Шаг 1-3. На первом уровне имеем четыре допустимых вектора x^1: $x^1 = (0,0,0,0)$; $x^1 = (14,0,0,0)$; $x^1 = (0,8,0,0)$; $x^1 = (14,8,0,0)$.

Дальше, для сокращения записи, нулевые элементы векторов будем упускать (кроме вектора $(0,0,0,0)$) , то есть записанные выше вектора будут иметь вид : $x_i^1 = 0, \forall i \in J_4$; $x_1^1 = 14$; $x_2^1 = 8$; $x_1^1 = 14$, $x_2^1 = 8$.

Шаг 4. $x_i^1 = 0, \forall i \in J_4, \quad y_i^1 = 0, \forall i \in J_2 \; v^1 = 0$;

$$x_1^1 = 14,\ y_1^1 = 12,\ v^1 = 2;\ \ x_2^1 = 8,\ y_2^1 = 5,\ v^1 = 3;$$

$$x_1^1 = 14,\ x_2^1 = 8,\ y_1^1 = 12,\ y_2^1 = 10,\ v^1 = 0.$$

Шаг 5-8. Разветвляем первый вектор (t=1) и переходим к следующим уровням разветвления:

$$j=2:\ x_1^2 = 14,\ y_1^2 = 12,\ v^2(1) = 2;$$

$$j=3:\ x_2^3 = 8,\ x_3^3 = 7,\ y_2^3 = 15,\ v^3(1) = 2;$$

$$j=4:\ x_4^4 = 6,\ y_2^4 = 5,\ v^4(1) = 3.$$

Принимаем $\min\left(v^j(i)\right) = v^4(1) = 3$.

Шаг 9. Повторяем шаги 2-8. t=2.

$$j=1:\ x_i^1 = 0,\ \ \forall i \in J_4,\ y_i^1 = 0,\ \ \forall i \in J_2, v^1(2) = 0;$$

$$j=2:\ x_1^2 = 14,\ x_2^2 = 8,\ x_3^2 = 7,\ y_1^2 = 24,\ y_2^2 = 5,\ v^2(2) = 0;$$

$$j=3:\ x_i^3 = 0,\ \ \forall i \in J_4,\ y_i^3 = 0,\ \ \forall i \in J_2,\ v^3(2) = 0;$$

$$j=4:\ x_4^4 = 6,\ y_2^4 = 5,\ v^4(2) = 1.$$

Принимаем $\min\left(v^j(i)\right) = v^4(2) = 1$.

Оценки (2) для остальных векторов превышают значение $v^4(2)$, то есть для них выполняется условие (3). Эти вектора x исключаем из рассмотрения.

Шаг 10. Таким образом, оптимальное размещения объектов обслуживания определяет вектор x: $x_i^1 = 0,\ \forall i \in J_4$; $x_1^2 = 14$, $x_2^2 = 8$, $x_3^2 = 7$; $x_i^3 = 0,\ \forall i \in J_4$; $x_4^4 = 6$, то есть клиенты будут обслуживаться во втором и четвертом пунктах; оптимальному количеству отделений в размещенных объектах обслуживания соответствует вектор y: $y_i^1 = 0, \forall i \in J_2$; $y_1^2 = 2q_1 = 24$, $y_2^2 = q_2 = 5$; $y_i^3 = 0, \forall i \in J_2$; $y_2^4 = q_2 = 5$; то есть во втором пункте - 2 объекта по 12 мест и 1 объект на 5 мест, в четвертом – 1 объект на 5 мест.

Шаг 11. Оптимальное значение целевой функции $F_{\min}(z) = 1$, то есть из 35 больных лечение одного передается на высший уровень.

Примеры расчетов на ЭВМ Pentium-120 приведены в таблице. Данные для расчетов сформированы случайным образом аналогично описанному выше примеру; r, w - задаются.

№	r	w	$\lvert e \rvert$	Время	№	r	w	$\lvert e \rvert$	Время
1	4	2	$1{,}1\cdot10^6$	3 с	11	6	4	$3{,}8\cdot10^8$	8 мин 12 с
2	4	3	$1{,}8\cdot10^7$	40 с	12	6	5	$4{,}8\cdot10^8$	32 мин 30 с
3	4	4	$8{,}4\cdot10^6$	14 с	13	7	2	$1{,}7\cdot10^8$	40 с
4	4	5	$4{,}7\cdot10^5$	4 с	14	7	3	$3{,}4\cdot10^7$	1 мин 15 с
5	5	2	$6{,}3\cdot10^6$	17 с	15	7	4	$9{,}9\cdot10^9$	3 ч 50 мин
6	5	3	$4{,}2\cdot10^8$	14 мин 20с	16	8	2	$7{,}1\cdot10^8$	41 мин 16 с
7	5	4	$6{,}0\cdot10^6$	11 с	17	8	3	$9{,}1\cdot10^8$	30 мин 56 с
8	5	5	$1{,}5\cdot10^7$	1 мин 20 с	18	9	2	$4{,}0\cdot10^8$	27 мин 09 с
9	6	2	$2{,}2\cdot10^6$	41 с	19	9	3	$3{,}0\cdot10^8$	11 мин 23 с
10	6	3	$1{,}7\cdot10^7$	1 мин 05 с	20	10	2	$2{,}8\cdot10^8$	46 мин

Список использованной литературы

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.- Киев: Наук. думка, 1981.- 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования .- К.: Наук. думка, 1986.- 268с.
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Поступила в редколлегию 29.09.2001 г.