

В.А. ГЕРАСИК, м.н.с., ШЕВЛЯКОВ Ю.А., д-р техн. наук.
Таврический национальный университет

ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВИЖУЩЕЙСЯ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Исследуется влияние движения акустической среды с постоянной горизонтальной скоростью на свойства нестационарных бездисперсионных поверхностных волн Стоунли, а также гидроупругой волны. Обобщается уравнение Стоунли на случай горизонтального движения акустической среды, численно исследуется зависимость фазовых скоростей волны Стоунли от числа Маха. Анализируются теоретические сейсмограммы (ТС), полученные на основе аналитического решения плоской задачи.

Известно [4], что несмотря на огромную разницу в плотности воздуха и грунта, возмущения атмосферного давления, перемещаясь вдоль поверхности, могут усиливать поверхностные волны, когда их фазовая скорость равна скорости звука в воздухе. Такое взаимодействие с воздухом наблюдается для изгибных волн во льдах, плавающих по поверхности океана, и для волн, аналогичных волнам Релея, возникающих в среде с низкоскоростными поверхностными слоями [6]. Известно также, что повышенный высокочастотный сейсмический фон наблюдается при прохождении ураганных атмосферных масс.

В предлагаемой модели «верхняя» акустическая среда (жидкость, газ и т.д.) имеет постоянную горизонтальную скорость v_{0x} , а «нижняя» (морское дно, поверхность Земли, ледник и т.д.) описывается уравнениями упругого изотропного тела, так что при $v_{0x} = 0$ эта задача эквивалентна известной задаче о распространении волны Стоунли [1, 5, 7]. Достаточно полный обзор по волнам Стоунли приводится в [5]; в [1] приводится обзор различных модификаций волны Стоунли, при этом случай движения акустической среды не упоминается.

Пусть акустическая среда ($z < 0$) с постоянной плотностью V и скоростью звука c описывается системой уравнений акустики движущейся среды [2, 3]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_0 + \frac{\nabla P}{V} = \mathbf{F}, \quad \frac{1}{c^2 V} \cdot \frac{dP}{dt} + \nabla\mathbf{v} = Q, \quad (1)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla$ - субстанциональная производная, \mathbf{v}_0 характеризует среднюю скорость среды, \mathbf{v} описывает поле относительных акустических скоростей, P - давление, \mathbf{F} - вектор внешних сил и Q - источник масс.

Рассматривается случай, когда $\mathbf{F} = 0$, $Q = 0$, а средние скорости среды постоянны, так что $\mathbf{v}_0 = const$. В таком случае в первом уравнении (1) $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_0 \equiv 0$, а если ввести потенциал скоростей Φ_A ($\mathbf{v} = \nabla \Phi_A$), то из системы (1) связь давления P с потенциалом Φ_A выражается в виде:

$$P = -V \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \right) \Phi_A, \quad (2)$$

а уравнение для искомого потенциала Φ_A имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \right)^2 \Phi_A = c^2 \nabla^2 \Phi_A. \quad (3)$$

Нижнее полупространство ($z > 0$) занимает однородное упругое изотропное тело плотности r , со скоростями продольных волн a и поперечных b , которое описывается потенциалами смещений P и SV волн ($\mathbf{u} = \nabla f + \nabla \times \nabla \times (0, \mathbf{y})$), удовлетворяющими соответственно однородным волновым уравнениям:

$$\Delta f = a^2 \nabla^2 f, \quad \Delta \mathbf{y} = b^2 \nabla^2 \mathbf{y}. \quad (4)$$

Пусть в начале координат расположен импульсный силовой источник мощности N , в таком случае граничные условия на границе раздела сред $z = 0$ полагаются в виде:

$$v_z^{(1)} = v_z^{(2)}, \quad s_{zz} + P = -Nd(x)d(t), \quad s_{rz} = 0, \quad (5)$$

При решении плоской задачи будем считать $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, 0)$, т.е. рассматривается случай горизонтального течения с постоянной скоростью. Применяя к (3), (4) двойное преобразование Фурье - Лапласа и учитывая физический смысл задачи, а также, то что оператор $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_{0x} \frac{\partial}{\partial x}$ в пространстве изображений эквивалентен $(s + ikv_{0x})$, можно получить выражения для изображений искомых потенциалов Φ_A , Φ и Ψ (здесь и далее изображения и оригиналы различаются в зависимости от аргументов):

$$\begin{aligned} \Phi_A(k, z, s) &= A(k, s) \cdot e^{cz}, \quad (z < 0) \\ \Phi(k, z, s) &= B(k, s) \cdot e^{-xz}, \quad \Psi(k, z, s) = C(k, s) \cdot e^{-hz}, \quad (z > 0) \end{aligned} \quad (6)$$

где $c = \frac{1}{c} \sqrt{s^2 + k^2(c^2 - v_{0x}^2) + 2iks v_{0x}}$, $x = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}$, $h = \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{b^2}}$.

Для изображений давления и вертикальной компоненты скорости акустической среды имеем ($z < 0$):

$$P(k, z, s) = -V(s + ikv_{0x}) A(k, s) \cdot e^{cz}, \quad (7)$$

$$v_z^{(1)}(k, z, s) = cA(k, s) \cdot e^{cz}. \quad (8)$$

Изображения компонент смещений упругого полупространства можно представить в виде:

$$u_x(k, z, s) = ik\Phi(k, z, s) - \frac{\partial}{\partial z} \Psi(k, z, s) = ikB(k, s)e^{-xz} + hC(k, s)e^{-hz},$$

$$u_z(k, z, s) = \frac{\partial}{\partial z} \Phi(k, z, s) + ik\Psi(k, z, s) = -xB(k, s)e^{-xz} + ikC(k, s)e^{-hz}, \quad (9)$$

тогда для вертикальной компоненты скорости имеем:

$$v_z^{(2)}(k, z, s) = s \cdot u_z(k, z, s). \quad (10)$$

Изображения компонент напряжений в этом случае имеют вид:

$$s_{zz} = m \left[(2k^2 + s^2/b^2) B e^{-xz} - 2ikh C e^{-hz} \right]$$

$$s_{rz} = m \left[-2ikx B e^{-xz} - (2k^2 + s^2/b^2) C e^{-hz} \right]. \quad (11)$$

Подставляя найденные выражения в граничные условия (5), можно получить систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, откуда $A(k, s)$, $B(k, s)$, $C(k, s)$ находятся в виде:

$$A(k, s) = N \frac{s^3 x}{cb^2 m S(k, s)}, \quad B(k, s) = -N \frac{2k^2 + s^2/b^2}{m S(k, s)},$$

$$C(k, s) = N \frac{2ikx}{m S(k, s)}, \quad (12)$$

где $S(k, s) = (2k^2 + s^2/b^2)^2 - 4k^2 x h + \frac{Vx s^3 (s + iv_{0x} k)}{rcb^4}$ - соотношение

для волн Стоунли, обобщенное на случай горизонтального движения акустической среды с постоянной скоростью v_{0x} . В случае $v_{0x} = 0$ (покоящаяся среда) $S(k, s)$ переходит в известное уравнение Стоунли [1, 5, 7].

Переход к контурному интегралу по лучевому параметру осуществляется формальной заменой $k = isp$ ($s > 0$) [4], тогда изображения Лапласа упругих смещений будут иметь вид:

$$u_x(x, z, s) = -\frac{N}{2pm} i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{P}{S(p)} \left[(2p^2 - 1/b^2) \cdot e^{-s(px+xz)} + 2xhe^{-s(px+hz)} \right] dp,$$

$$u_z(x, z, s) = -\frac{N}{2pm} i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x}{S(p)} \left[(2p^2 - 1/b^2) \cdot e^{-s(px+xz)} - 2p^2 e^{-s(px+hz)} \right] dp,$$

где $c = \frac{1}{c} \sqrt{[1 - p(v_{0x} - c)] \cdot [1 - p(v_{0x} + c)]}$, $x = \sqrt{a^{-2} - p^2}$,

$$h = \sqrt{b^{-2} - p^2},$$

$$S(p) = (2p^2 - 1/b^2)^2 + 4p^2 x h + \frac{Vx(1 - v_{0x}p)}{rcb^4}. \quad (13)$$

Вводя безразмерные переменные и функции: $M = \frac{v_{0x}}{c}$ - число

Маха,

$$g = \frac{b}{a}, J = \frac{b}{c}, \bar{r} = \frac{V}{r}, \bar{p} = bp, \bar{z} = \frac{z}{x}, \bar{x} = \sqrt{g^2 - \bar{p}^2}, \bar{h} = \sqrt{1 - \bar{p}^2},$$

$$\bar{c} = \sqrt{[q - \bar{p}(1 + M)] \cdot [q + \bar{p}(1 - M)]},$$

$$\bar{S}(\bar{p}) = (2\bar{p}^2 - 1)^2 + 4\bar{p}^2 \bar{x} \bar{h} + \bar{r} \frac{\bar{x}}{\bar{c}} \cdot (1 - \frac{M}{J} \bar{p}) \quad (14)$$

(далее черточки над безразмерными величинами опускаются), выделяя отдельно продольные и поперечные волны, можно получить:

$$\begin{pmatrix} u_x^P(x, z, s) \\ u_x^S(x, z, s) \end{pmatrix} = -\frac{iN}{2pm} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{p}{S(p)} \begin{bmatrix} (2p^2 - 1) \cdot e^{-s \frac{x}{b}(p+xz)} \\ 2xh \cdot e^{-s \frac{x}{b}(p+hz)} \end{bmatrix} dp,$$

$$\begin{pmatrix} u_z^P(x, z, s) \\ u_z^S(x, z, s) \end{pmatrix} = -\frac{iN}{2pm} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{x}{S(p)} \begin{bmatrix} (2p^2 - 1) \cdot e^{-s \frac{x}{b}(p+xz)} \\ -2p^2 \cdot e^{-s \frac{x}{b}(p+hz)} \end{bmatrix} dp. \quad (15)$$

Далее, чтобы получить из (15) алгебраические выражения во временной области, следует преобразовать выражение для изображения Лапласа решения к виду прямого преобразования Лапласа [4, 8, 9].

Рассмотрим обращение во временную область на примере продольной компоненты u_x^P . Можно ввести вещественную переменную, имеющую размерность времени, так что: $t = \frac{x}{b}(p + xz)$, а с учетом

$\bar{t} = \frac{b \cdot t}{x}$ и, опуская черту над безразмерной переменной, можно полу-

чить: $t_x = p + xz$. Таким образом, u_x^P из (15) можно представить в виде:

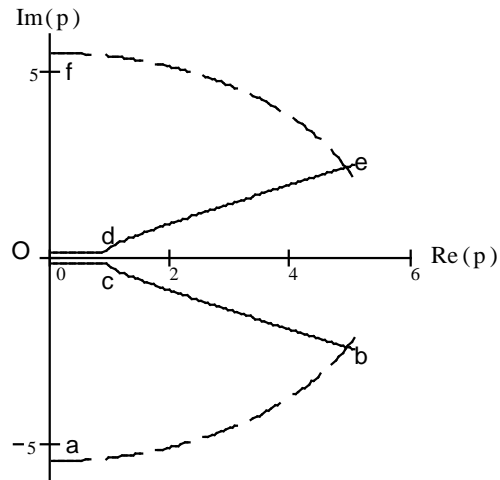
$$u_x^P(z, s) = -\frac{iN}{2ptx} \int_C p_x (2p_x^2 - 1) \frac{e^{-st}}{S(p_x)} dp_x, \quad (16)$$

где $\frac{dp_x}{dt} = \frac{\pm ix}{\sqrt{t^2 - g^2(z^2 + 1)}}$, а контур

$C(abcOdef)$, в пространстве $Re(p)$ - $Im(p)$, изображенный на Рис. 1, определяется условием:

$$p_x(t) = \frac{t \pm iz\sqrt{t^2 - g^2(z^2 + 1)}}{z^2 + 1}, \quad \text{причем}$$

знак перед радикалом соответствует выбору условия $Im(p) > 0$ (-) или $Im(p) < 0$ (+). Пунктиром обозначены связующие дуги бесконечного радиуса, которые образуют замкнутый контур с осью $Im p$, содержащий область S .



Следует отметить, что в случае $x < 0$ следовало бы рассматривать зеркальное отражение контура относительно оси $Im p$. Наличие экспоненты в подынтегральном выражении (16) позволяет применить лемму Жордана и поэтому вклад в интеграл по связующим дугам равен нулю. Интеграл по участкам контура cO и Od также равен нулю, при этом контур не пересекает разрезы для x , h , c ($Re x = 0$, $Re h = 0$, $Re c = 0$), в силу чего условия излучения на бесконечности не нарушаются. Предполагая, что корни уравнения $S(p) = 0$ не лежат в области S , (16) можно представить в виде:

$$u_x^P(z, s) = -\frac{iN}{2ptx} \left(\int_{-\infty}^{g\sqrt{z^2+1}} F(\bar{p}_x) \cdot e^{-st} \frac{d\bar{p}_x}{dt} dt + \int_{g\sqrt{z^2+1}}^{\infty} F(p_x) \cdot e^{-st} \frac{dp_x}{dt} dt \right), \quad (17)$$

где $F(p) = \frac{p}{S(p)}(2p^2 - 1)$, $p_x = \frac{t + iz\sqrt{t^2 - g^2(z^2 + 1)}}{z^2 + 1}$, а черта над p_x

означает комплексное сопряженное.

Используя $F(\bar{p}) = \bar{F}(p)$, а также $\frac{d\bar{p}_x}{dt} = -\frac{dp_x}{dt}$, можно получить:

$$u_x^P(z, s) = -\frac{N}{ptx} \text{Im} \int_0^{\infty} F(p_x) \cdot H(t - g\sqrt{z^2 + 1}) e^{-st_x} \frac{dp_x}{dt} dt, \quad (18)$$

так что решение во временной области будет иметь вид:

$$u_x^P(z, t) = -\frac{N}{pmx} \operatorname{Im} \left\{ F(p_x) H(t - g\sqrt{z^2 + 1}) \frac{dp_x}{dt} \right\} \Big|_{p_x=p_x(t)}. \quad (19)$$

Таким образом, из (15) по аналогии с выводом (19) получаем решение, зависящее от двух безразмерных параметров $\bar{t} = \frac{b \cdot t}{x}$ и

$\bar{z} = \frac{z}{x}$ в виде: $u_{x,z}(z, t) = u_{x,z}^P(z, t) + u_{x,z}^S(z, t)$, при этом $u_{x,z}^P(z, t)$ и $u_{x,z}^S(z, t)$ определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_x^P(z, t) \\ u_x^S(z, t) \end{pmatrix} = -\frac{N}{pmx} \operatorname{Im} \left[\begin{array}{l} \left\{ \frac{p_x(2p_x^2 - 1)}{S(p_x)} H(t - g\sqrt{z^2 + 1}) \frac{dp_x}{dt} \right\} \Big|_{p_x=p_x(t)} \\ \left\{ \frac{2p_h x(p_h) h(p_h)}{S(p_h)} H(t - \sqrt{z^2 + 1}) \frac{dp_h}{dt} \right\} \Big|_{p_h=p_h(t)} \end{array} \right], \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} u_z^P(z, t) \\ u_z^S(z, t) \end{pmatrix} = -\frac{N}{pmx} \operatorname{Im} \left[\begin{array}{l} \left\{ \frac{x(p_x) \cdot (2p_x^2 - 1)}{S(p_x)} \cdot H(t - g\sqrt{z^2 + 1}) \frac{dp_x}{dt} \right\} \Big|_{p_x=p_x(t)} \\ \left\{ \frac{-2x(p_h) p_h^2}{S(p_h)} \cdot H(t - \sqrt{z^2 + 1}) \frac{dp_h}{dt} \right\} \Big|_{p_h=p_h(t)} \end{array} \right],$$

где

$$p_x = \frac{t + iz\sqrt{t^2 - g^2(z^2 + 1)}}{z^2 + 1}, \quad p_h = \frac{t + iz\sqrt{t^2 - (z^2 + 1)}}{z^2 + 1},$$

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{ix}{\sqrt{t^2 - g^2(z^2 + 1)}}, \quad \frac{dp_h}{dt} = \frac{ih}{\sqrt{t^2 - (z^2 + 1)}}.$$

Для того чтобы включить в рассмотрение возможные головные волны в случае $c > a$, в выражениях (20) следует не учитывать функции Хевисайда в верхних столбцах.

Анализируя соотношение типа Стоунли (15), записанное в пространстве безразмерной горизонтальной медленности, следует отметить наличие двух точек ветвления в знаменателе последнего слагаемого c : $p_1 = \frac{q}{M+1}$; $p_2 = \frac{q}{M-1}$. Этим точкам (см. Рис. 2, 3), соответствуют импульсы, движущиеся с размерными скоростями:

$$v_1 = v_{0x} + c, \quad v_2 = v_{0x} - c. \quad (21)$$

Следует отметить, что скорости v_1 , v_2 в данном случае являются скоростями распространения возмущения в акустической среде вдоль оси x . Таким образом, скорости (21) характеризуют гидро- или аэроупругую волну, связанную с движением фронта звуковой волны соответственно в жидкой или газообразной акустической среде.

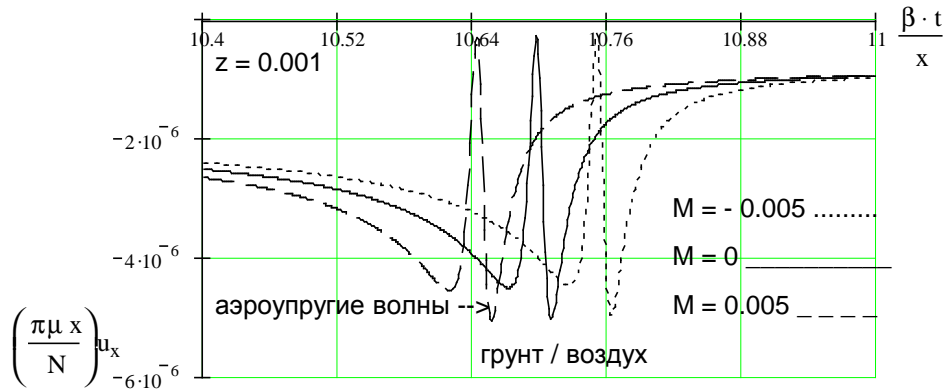


Рис. 2

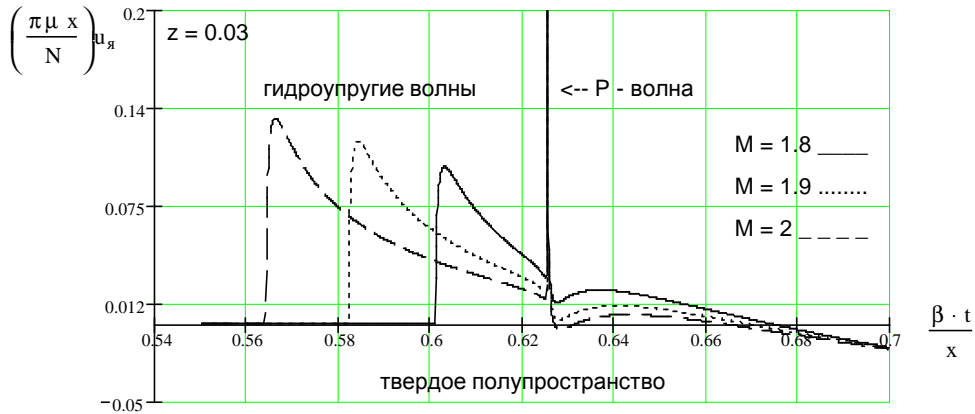


Рис. 3

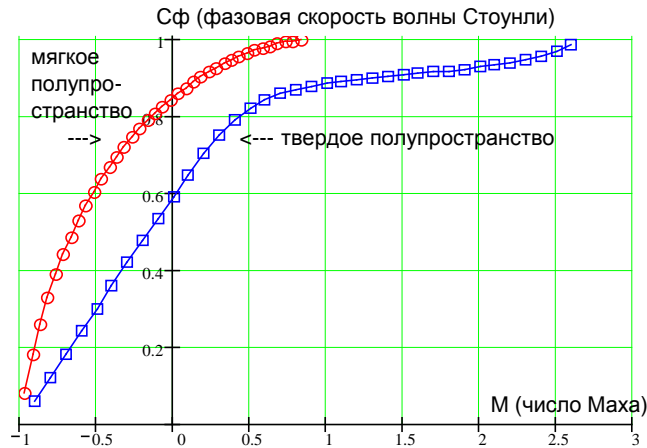


Рис. 4

Анализ ТС, построенных для различных наборов упругих параметров сред (g, J, r) и чисел Маха (включая случай $M = 0$), показывает, что времена, соответствующие (21), при достаточно малых z всегда можно выделить. Как правило, наблюдается незначительное искажение формы сигнала (Рис. 2), так что эти импульсы имеют амплитуды, на несколько порядков меньше волны Стоунли. В случаях $v_1 > a$ или $v_2 > a$ эти волны становятся головными (коническими) волнами (Рис. 3). Таким образом, на основании анализа волновых картин, построенных согласно (20), можно делать оценку влияния распространяющегося акустического сигнала на упругие деформации для различных моделей сред этого типа.

ТС (Рис. 2, 5) рассчитывались для моделей «мягкого» ($c > a$) и «твердого» ($c < a$) подстилающего полупространства с характеристиками, приведенными в [5]: $g = 1/2, J = 1/3, r = 5/9$ и $g = 5/8, J = 5/3, r = 2/5$ соответственно. Рис. 3 демонстрирует чувствительность гидроупругой волны к малым изменениям числа Маха, при этом реальные упругие параметры для системы грунт / воздух следующие: $g = 1/\sqrt{3}, J = 10.7, r = 2.124 \cdot 10^{-3}$. В этом случае, в силу малости r , амплитуда и фазовая скорость волны Стоунли незначительно изменяются только на гиперзвуковых скоростях.

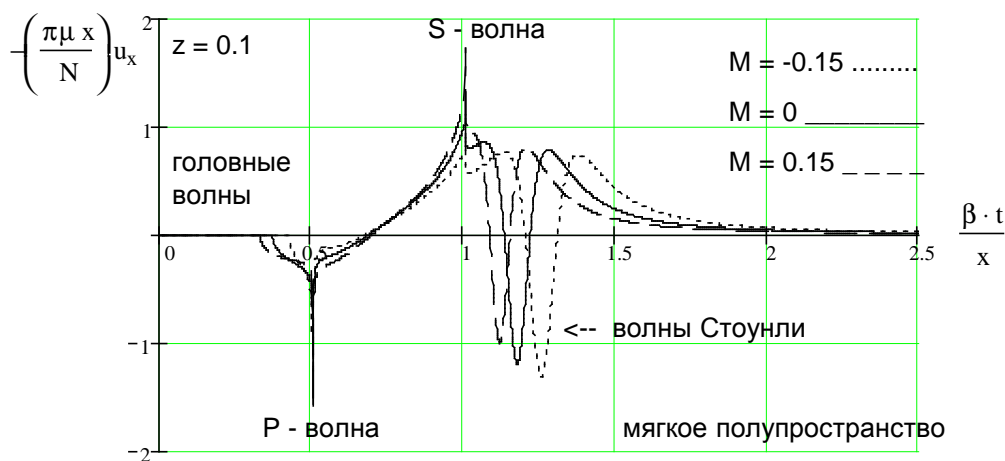


Рис. 5

На Рис. 4 изображены зависимости безразмерных (отнесенных к скорости поперечных волн b) фазовых скоростей волны Стоунли S_ϕ от числа Маха M . Вне представленного диапазона чисел Маха корни уравнения $S(p)$ (14) имеют ненулевые мнимые части, в этом случае решение теряет устойчивость. Для обоих наборов упругих параметров

C_Φ увеличивается или уменьшается в зависимости от направления течения в верхней среде. Если направление течения совпадает с направлением распространения волны Стоунли, то C_Φ растет, в противном случае - уменьшается и даже стремится к нулю при $M \rightarrow -1$. Потеря устойчивости решения связана с тем, что при достаточно больших числах Маха C_Φ может достигать скорости поперечных волн. Таким образом, из решения уравнения $S(1, M) = 0$ можно получить интервал устойчивости по параметру числа Маха в виде:

$$M_{\text{крит}}^- < M < M_{\text{крит}}^+, \quad M_{\text{крит}}^- = -1, \quad M_{\text{крит}}^+ = J \left(1 + \frac{1}{\sqrt{J^2 + r^2(1-g^2)}} \right). \quad (22)$$

Достоверность выводов можно дополнительно проверить, если в соответствии с (20) строить ТС смещений, аналогично (Рис. 5), для различных чисел Маха и анализировать относительные времена вступления объемных волн (Р и S), а также волны Стоунли.

Список использованной литературы:

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
2. Осташев В.Е. Распространение звука в движущихся средах М.: Наука, 1992. 208 с.
3. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т.1. М.: Мир 1983. 520 с.
5. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
6. Press F., Crary A.P., Oliver J., Katz S. Air – coupled flexural waves in floating ice. // Transactions of the Amer. Geophys. Union, 32, 166 – 172, 1951.
7. Stoneley R. Elastic waves at the surface of separation of two solids. - Proc. Roy. Soc. London A. 1924, 106, p. 416 - 429.
8. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980, - 343 с.
9. Cagniard L. Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. Trans. by E.A. Flinn and C.H. Dix. New York: McGraw-Hill, 1962.

Поступила в редколлегию 12.07.2001 г.